

Prediksi Pertumbuhan Populasi Kota Surabaya Menggunakan Model Gompertz dengan Skema Prediktor- Korektor Adams-Bashforth-Moulton dan Milne-Simpson

Ajril Abyad Al Haq ¹, Kresna Oktafianto ²

^{1, 2} Matematika, Universitas PGRI Ronggolawe, Tuban, Indonesia
abyadalhaq02@gmail.com

Abstract

This study aims to predict the population growth of Surabaya City using the Gompertz model with parameters $P_0 = 2,765,487$, $K = 5,000,000$, and $r = 0.016$. The model is solved numerically using the Adams-Bashforth-Moulton (ABM) and Milne-Simpson predictor-corrector methods, with initial values computed using the fourth-order Runge-Kutta (RK4) method. Population data from 2014 to 2024 are used as the basis, and predictions are extended to 2031. Numerical results show that both methods exhibit very high internal consistency, with relative errors between predictor and corrector on the order of 10^{-10} . Quantitatively, the Milne-Simpson method yields an average predictor-corrector relative error of 2.47×10^{-10} , slightly smaller than that of the ABM method, which achieves 2.76×10^{-10} . Nevertheless, when compared to actual data, both methods yield identical MAPE (Mean Absolute Percentage Error) values of 1.2119217%, indicating no significant difference in predictive accuracy. The population projection indicates that the population of Surabaya City is expected to continue increasing, reaching approximately 3,184,361 inhabitants by 2031.

Keyword: Adams-Bashforth-Moulton, Gompertz, Milne-Simpson, Runge-Kutta

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk memprediksi pertumbuhan populasi Kota Surabaya menggunakan model Gompertz dengan parameter $P_0 = 2,765,487$, $K = 5,000,000$, dan $r = 0.016$. Model diselesaikan secara numerik melalui metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton (ABM) dan Milne-Simpson, dengan nilai awal dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (RK4). Data populasi tahun 2014–2024 digunakan sebagai basis, dan prediksi diperpanjang hingga 2031. Hasil numerik menunjukkan bahwa kedua metode memiliki tingkat konsistensi internal yang sangat tinggi, dengan nilai error relatif antara prediktor dan korektor berada pada orde 10^{-10} . Secara kuantitatif, metode Milne-Simpson menghasilkan rata-rata error relatif prediktor-korektor sebesar 2.47×10^{-10} , sedikit lebih kecil dibandingkan metode ABM yang mencapai 2.76×10^{-10} . Meskipun demikian, ketika dibandingkan terhadap data aktual, kedua metode memberikan nilai MAPE (Mean Absolute Percentage Error) yang identik, yaitu sebesar 1.2119217%, mengindikasikan tidak adanya perbedaan akurasi prediksi yang berarti. Proyeksi populasi menunjukkan bahwa jumlah penduduk Kota Surabaya diperkirakan akan terus meningkat hingga mencapai sekitar 3,184,361 jiwa pada tahun 2031.

Kata Kunci: Adams-Bashforth-Moulton, Gompertz, Milne-Simpson, Runge-Kutta

1. Pendahuluan

Laju pertumbuhan penduduk menjadi salah satu variabel penting dalam perencanaan pembangunan wilayah, khususnya di kawasan metropolitan yang memiliki dinamika demografis kompleks (Aulia, 2025). Kota Surabaya sebagai salah satu pusat urban terkemuka di Indonesia menunjukkan tren pertumbuhan penduduk yang cenderung meningkat dari tahun ke tahun, meskipun pada periode tertentu mengalami fluktuasi akibat pengaruh kondisi sosial-

ekonomi. Kajian matematis terhadap pola pertumbuhan ini menjadi sangat diperlukan untuk menghasilkan proyeksi yang akurat sebagai dasar pengambilan kebijakan di bidang infrastruktur, perumahan, kesehatan, dan pelayanan publik (Wardhana dkk., 2024).

Dalam kerangka matematis, dinamika pertumbuhan populasi dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial nonlinier (Anggraeni dkk., 2025). Model Gompertz merupakan salah satu model yang relevan dalam studi demografi kuantitatif karena mampu menggambarkan pola pertumbuhan asimtotik, yaitu pertumbuhan yang berlangsung pesat di awal kemudian melambat seiring mendekati kapasitas dukung lingkungan (carrying capacity) (Susmiati & Nugroho, 2025). Model ini memiliki solusi analitik eksak yang memungkinkan dilakukannya perbandingan langsung antara pendekatan analitik dan pendekatan numerik (Tjørve & Tjørve, 2017).

Meskipun solusi eksak tersedia, penyelesaian secara numerik tetap memiliki peran penting dalam implementasi komputasi berbasis data empiris. Metode numerik yang dikaji dalam penelitian ini meliputi metode Runge–Kutta orde empat (RK4), Adams–Bashforth–Moulton (ABM), dan Milne–Simpson. RK4 merupakan metode satu langkah (single-step) dengan tingkat akurasi tinggi (Ghoreishi dkk., 2023), sedangkan ABM dan Milne–Simpson termasuk metode multilangkah (multistep) yang lebih efisien secara komputasi namun memerlukan nilai awal tambahan yang diperoleh dari RK4, sehingga prosedur kalkulasi yang dihasilkan stabil (Abdullah, 2025). Untuk mengevaluasi ketelitian masing-masing metode secara objektif, penelitian ini menggunakan Mean Absolute Percentage Error (MAPE) sebagai metrik standar. MAPE mengukur rata-rata persentase deviasi absolut antara nilai numerik dan nilai referensi, sehingga menghasilkan interpretasi yang mudah dipahami (Hussain, 2019).

Meskipun studi komparatif antara metode Adams–Bashforth–Moulton dan Milne–Simpson pada model Gompertz telah dilakukan di berbagai konteks demografi global, penerapannya pada data kependudukan Indonesia, khususnya Kota Surabaya, masih sangat terbatas. Karakteristik data demografi Indonesia yang sering kali menunjukkan fluktuasi akibat faktor migrasi, kebijakan keluarga berencana, serta dinamika urbanisasi memerlukan evaluasi tersendiri terhadap keakuratan metode numerik yang digunakan. Penelitian ini hadir untuk mengisi kesenjangan tersebut dengan membandingkan secara kuantitatif performa kedua metode terhadap solusi eksak model Gompertz berbasis data aktual penduduk Kota Surabaya periode 2014–2024. Dengan demikian, hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan rekomendasi metodologis bagi peneliti dan praktisi demografi di Indonesia dalam memilih metode numerik yang paling tepat untuk proyeksi populasi.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif dengan menerapkan metode numerik untuk menyelesaikan model pertumbuhan populasi Gompertz. Data yang digunakan berupa data jumlah penduduk Kota Surabaya periode 2014–2024 yang diperoleh dari publikasi resmi

Badan Pusat Statistik (BPS) (BPS Surabaya, 2025). Model Gompertz digunakan untuk memodelkan dinamika pertumbuhan populasi, dengan parameter laju pertumbuhan r dan kapasitas dukung lingkungan K . Parameter K ditentukan melalui pendekatan trial-and-error dengan menguji beberapa nilai kapasitas dukung lingkungan hingga diperoleh model yang stabil dan representatif; nilai $K = 5,000,000$ dipilih karena menghasilkan kurva Gompertz yang paling sesuai dengan tren data observasi. Parameter $r = 0.016$ per tahun diperoleh melalui transformasi logaritmik persamaan Gompertz ke bentuk garis lurus $y = -rt + c$, dengan menghitung $y_0 = \ln(\ln(K/P_0)) = -0.5239$ pada $t = 0$ (tahun 2014) dan $y_{10} = \ln(\ln(K/P_{10})) = -0.6835$ pada $t = 10$ (tahun 2024), sehingga diperoleh $r = (y_0 - y_{10}) / 10 \approx 0.016$. Nilai awal numerik dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat (RK4), kemudian digunakan sebagai nilai awal pada metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton orde empat dan Milne-Simpson untuk memperoleh solusi numerik. Ketelitian hasil prediksi dievaluasi dengan menggunakan Mean Absolute Percentage Error (MAPE).

Tabel 1. Data Penduduk Kota Surabaya

No	Tahun	Data Populasi
1	2014	2,765,487
2	2015	2,843,760
3	2016	2,858,493
4	2017	2,872,323
5	2018	2,885,245
6	2019	2,897,245
7	2020	2,874,314
8	2021	2,880,284
9	2022	2,887,223
10	2023	3,009,286
11	2024	3,018,022

Sumber: (BPS Surabaya, 2025)

2.1. Model Gompertz

Model pertumbuhan Gompertz digunakan untuk menggambarkan dinamika pertumbuhan populasi yang meningkat cepat pada tahap awal dan melambat ketika mendekati kapasitas dukung lingkungan (Pelinovsky dkk., 2022). Secara matematis model Gompertz dinyatakan sebagai:

$$\frac{dP}{dt} = rP \ln\left(\frac{K}{P}\right) \quad (1)$$

Dengan $P(t)$ menyatakan jumlah populasi pada waktu t , r merupakan laju pertumbuhan populasi, dan K merupakan kapasitas dukung lingkungan (*carrying capacity*). Bentuk umum solusi Model Gompertz dapat dinyatakan sebagai (Tjørve & Tjørve, 2017):

$$P(t) = Ke^{-e^{-rt+c}} \quad (2)$$

Dengan $c = \ln(\ln(K/P_0))$ merupakan konstanta yang diperoleh dari kondisi awal P_0 . Parameter r diperoleh melalui transformasi logaritmik pada persamaan (2). Dengan membagi kedua ruas dengan K diperoleh:

$$\frac{P(t)}{K} = e^{-e^{-rt+c}}$$

Dengan mengambil logaritma natural sehingga diperoleh:

$$\ln\left(\frac{P(t)}{K}\right) = -e^{-rt+c} \quad (3)$$

Mengalikan kedua ruas dengan -1 diperoleh:

$$-\ln\left(\frac{P(t)}{K}\right) = e^{-rt+c}$$

Ambil $\ln$ pada kedua ruas:

$$\ln\left(-\ln\left(\frac{P(t)}{K}\right)\right) = -rt + c$$

Dari sifat logaritma $\ln(a/b) = -\ln(b/a)$, maka:

$$\ln\left(\ln\left(\frac{K}{P(t)}\right)\right) = -rt + c \quad (4)$$

Sehingga bentuk persamaan garis lurus adalah:

$$y = -rt + c \quad (5)$$

Jika dibandingkan dengan bentuk umum persamaan garis lurus $y = mx + c$, maka kemiringan garis adalah $m = -r$. Oleh karena itu nilai parameter r dapat dihitung dari gradien garis sebagai berikut:

$$r = \frac{y_0 - y_{10}}{t_{10} - t_0} \quad (6)$$

2.2. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode Runge-Kutta merupakan alternatif dari Metode Deret Taylor yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Metode Runge-Kutta Orde Empat sering digunakan untuk menyelesaikan suatu persamaan diferensial karena metode yang paling teliti dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde sebelumnya (Olatunji & Akeju, 2025). Bentuk persamaan Metode Runge-Kutta Orde Empat adalah sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (7)$$

Dalam hal ini k adalah:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\ k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h) \end{aligned}$$

2.3. Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Metode Adams–Bashforth–Moulton merupakan metode multistep yang terdiri dari tahap prediktor dan korektor. Tahap prediktor menggunakan metode Adams–Bashforth, sedangkan tahap korektor menggunakan metode Adams–Moulton (Raming dkk., 2024). Metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton adalah metode multi-step yang diturunkan dari teorema dasar kalkulus:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (8)$$

Persamaan Prediktor Adams-Bashforth:

$$y_{n+1}^P = y_n + \frac{h}{24} (-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n) \quad (9)$$

Persamaan Korektor Adams-Moulton:

$$y_{n+1}^C = y_n + \frac{h}{24} (f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1}) \quad (10)$$

2.4. Metode Milne-Simpson Orde Empat

Metode prediktor-korektor lain yang terkenal adalah Metode Milne-Simpson (Adebisi dkk., 2025). Prediktor berdasarkan integrasi dari $f(x, y(x))$ pada interval $[x_{n-3}, x_{n+1}]$

$$y(x_{n+1}) = y(x_{n-3}) + \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (11)$$

Persamaan Prediktor Milne:

$$y_{n+1}^P = y_{n-3} + \frac{4h}{3} (2f_{n-2} - f_{n-1} + 2f_n) \quad (12)$$

Persamaan Korektor Simpson:

$$y_{n+1}^C = y_{n-1} + \frac{h}{3} (f_{n-1} + 4f_n + f_{n+1}) \quad (13)$$

Untuk analisis *error*, misalkan $\hat{p}$ adalah pendekatan ke p . *Error* mutlak $E_p = |p - \hat{p}|$ lalu untuk *error* relatif $E_p = |p - \hat{p}|/|p|$ (Dharmayasa, 2026), untuk $p \neq 0$.

2.5. Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*) adalah ukuran yang dipakai untuk melihat seberapa akurat suatu model prediksi dalam mendekati data aktual. Nilai MAPE dinyatakan dalam bentuk persen dan diperoleh dari rata-rata seluruh persentase kesalahan absolut. Semakin kecil nilai MAPE yang dihasilkan, semakin baik model tersebut dalam melakukan prediksi (Anggreini, 2020). Persamaan. MAPE:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|p - \hat{p}|}{|p|} \cdot 100\% \quad (14)$$

Adapun kriteria tingkat akurasi berdasarkan nilai MAPE adalah sebagai berikut.

$MAPE < 10\%$: Sangat Akurat

$10\% \leq MAPE \leq 20\%$: Akurat

$20\% \leq MAPE \leq 50\%$: Cukup Akurat

$MAPE > 50\%$: Tidak Akurat

3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

3.1. Parameter Model Gompertz

Berdasarkan data populasi Kota Surabaya periode 2014–2024, parameter model Gompertz ditentukan sebagai berikut. Nilai $K = 5,000,000$ diperoleh melalui proses estimasi parameter dengan melakukan beberapa percobaan nilai hingga diperoleh model yang stabil., sedangkan nilai r diperoleh melalui transformasi linear persamaan (4) dengan menghitung y_0 dan y_{10} sebagai berikut.

Nilai y_0 dihitung dengan mensubstitusikan data populasi tahun 2014 ($t = 0, P_0 = 2,765,487$) ke dalam persamaan (4):

$$y_0 = \ln \left(\ln \left(\frac{5,000,000}{2,765,487} \right) \right) = -0.5238752$$

Kemudian dihitung nilai y_{10} dengan mensubstitusikan data populasi tahun 2024 ($t = 10, P_{10} = 3,018,022$) ke dalam persamaan (4):

$$y_{10} = \ln \left(\ln \left(\frac{5,000,000}{3,018,022} \right) \right) = -0.6835211$$

Setelah memperoleh nilai y_0 dan y_{10} , nilai r dihitung menggunakan persamaan (6), diperoleh:

$$r = \frac{-0.524 - (-0.684)}{10} \approx 0.016$$

dengan demikian, persamaan Model Gompertz menjadi:

$$\frac{dP}{dt} = 0.016P \ln \left(\frac{5,000,000}{P} \right)$$

3.2. Nilai Awal dengan Runge-Kutta Orde Empat

Hasil nilai awal P_1, P_2 , dan P_3 yang diperoleh dari Metode Runge-Kutta Orde Empat ukuran langkah $h = 1$, dan $P_0 = 2,765,487$ disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Nilai Awal Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat

n	t_n	Tahun	P_n	$f(t, P) = 0.0156P \ln \left(\frac{5,000,000}{P} \right)$
0	1	2014	2,765,487	26,204.47882820
1	2	2015	2,791,605.5231160	26,032.10231370
2	3	2016	2,817,550.2965149	25,857.00142340
3	4	2017	2,843,318.6615887	25,679.30737080

3.3. Solusi Model Gompertz menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton Orde Empat

Solusi numerik berupa estimasi populasi penduduk diperoleh melalui penerapan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Sebelum metode ini diterapkan, terlebih dahulu dicari nilai awal P_1, P_2 , dan P_3 serta nilai $f_n(t_n, P_n)$ menggunakan metode Runge-Kutta orde empat.

Nilai-nilai tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton. Dengan menggunakan $n = 3$, $h = 1$, dan $P_3 = 2,843,318.6615887$, diperoleh nilai prediktor sebagai berikut:

$$P_n^{(0)} = P_n + \frac{h}{24}(-9f_{n-3} + 37f_{n-2} - 59f_{n-1} + 55f_n)$$

$$P_4^{(0)} = P_3 + \frac{h}{24}(-9f_0 + 37f_1 - 59f_2 + 55f_3) = 2,868,908.0906539$$

Selanjutnya dicari nilai $f_4^{(0)}$, maka diperoleh:

$$f_4^{(0)} = f(t_4, P_4) = 25,499.1494086$$

Setelah memperoleh nilai prediktor $P_4^{(0)}$ dan $f_4^{(0)}$, selanjutnya nilai dari prediktor diperbaiki dengan menggunakan persamaan korektor, diperoleh:

$$P_{n+1}^{(c)} = P_n + \frac{h}{24}(f_{n-2} - 5f_{n-1} + 19f_n + 9f_{n+1})$$

$$P_4^{(1)} = P_3 + \frac{h}{24}(f_1 - 5f_2 + 19f_3 + 9f_4) = 2,868,908.0899167$$

Setelah memperoleh nilai prediktor $P_4^{(0)}$ dan korektor $P_4^{(1)}$, selanjutnya dihitung *error* relatif sebagai berikut:

$$\frac{|P_4^{(1)} - P_4^{(0)}|}{|P_4^{(1)}|} = \frac{|2,868,908.0899167 - 2,868,908.0906539|}{|2,868,908.0899167|} = 2.5696188 \times 10^{-10}$$

Berdasarkan hasil perhitungan menggunakan metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton dengan nilai awal dari metode Runge-Kutta orde empat, diperoleh nilai prediksi populasi Kota Surabaya dari tahun 2014 hingga tahun 2031. Kolom $P_n^{(0)}$ merupakan hasil prediktor Adams-Bashforth, sedangkan kolom P_n merupakan hasil korektor Adams-Moulton. Adapun hasil perhitungan selengkapnya disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3. Solusi Model Gompertz Menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton

n	Tahun	$P_n^{(0)}$	P_n	Error Relatif
0	2014		2,765,487	
1	2015		2,791,605.5231160	
2	2016		2,817,550.2965149	
3	2017		2,843,318.6615887	
4	2018	2,868,908.0906539	2,868,908.0899167	$2.5696188 \times 10^{-10}$
5	2019	2,894,316.1821850	2,894,316.1814267	$2.6199612 \times 10^{-10}$
6	2020	2,919,540.6629814	2,919,540.6622046	$2.6606920 \times 10^{-10}$
7	2021	2,944,579.3832483	2,944,579.3824542	$2.6968186 \times 10^{-10}$
8	2022	2,969,430.3151744	2,969,430.3143649	$2.7261121 \times 10^{-10}$
9	2023	2,994,091.5507641	2,994,091.5499409	$2.7494156 \times 10^{-10}$
10	2024	3,018,561.2996308	3,018,561.2987955	$2.7672122 \times 10^{-10}$
11	2025	3,042,837.8867624	3,042,837.8859165	$2.7799715 \times 10^{-10}$

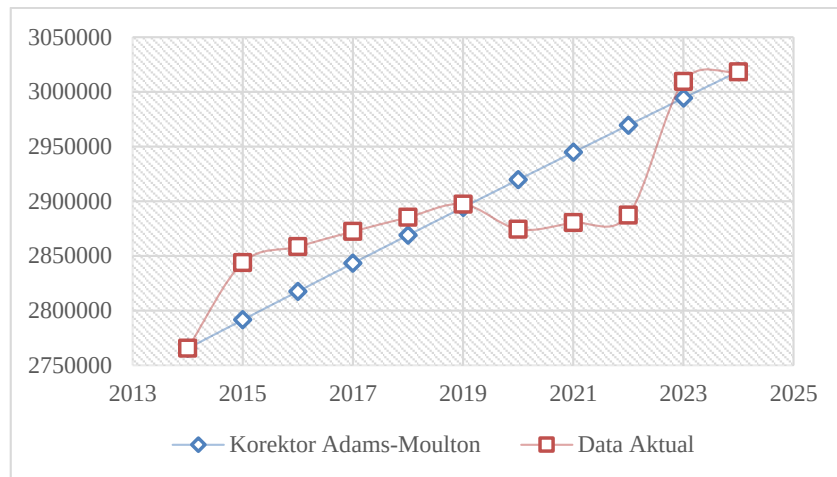
12	2026	3,066,919.7502596	3,066,919.7494046	$2.7878141 \times 10^{-10}$
13	2027	3,090,805.4390532	3,090,805.4381906	$2.7908592 \times 10^{-10}$
14	2028	3,114,493.6106022	3,114,493.6097334	$2.7895389 \times 10^{-10}$
15	2029	3,137,983.0285775	3,137,983.0277037	$2.7845909 \times 10^{-10}$
16	2030	3,161,272.5605340	3,161,272.5596565	$2.7757810 \times 10^{-10}$
17	2031	3,184,361.1755747	3,184,361.1746947	$2.7635047 \times 10^{-10}$

Pada Tabel 3, terlihat bahwa selisih antara nilai prediktor Adams-Bashforth dan korektor Adams-Moulton sangat kecil. Hal ini menunjukkan bahwa metode Adams-Bashforth-Moulton bekerja dengan baik dalam menyelesaikan persamaan diferensial model Gompertz. Dimulai dari $n = 4$ hingga $n = 17$, *error* relatif yang diperoleh konsisten berada pada orde 10^{-10} . Untuk mengevaluasi hasil prediksi, nilai korektor Adams-Moulton dibandingkan dengan data aktual populasi Kota Surabaya tahun 2014 hingga 2024. Perbandingan tersebut disajikan pada Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Perbandingan Korektor Adams-Moulton dan Data Aktual

n	Tahun	Korektor Adams-Moulton	Data Aktual	Error Mutlak
0	2014	2,765,487	2,765,487	0
1	2015	2,791,605.5231160	2,843,760	52,154.4768840
2	2016	2,817,550.2965149	2,858,493	40,942.7034851
3	2017	2,843,318.6615887	2,872,323	29,004.3384113
4	2018	2,868,908.0899167	2,885,245	16,336.9100833
5	2019	2,894,316.1814267	2,897,245	2,928.8185733
6	2020	2,919,540.6622046	2,874,314	45,226.6622046
7	2021	2,944,579.3824542	2,880,284	64,295.3824542
8	2022	2,969,430.3143649	2,887,223	82,207.3143649
9	2023	2,994,091.5499409	3,009,286	15,194.4500591
10	2024	3,018,561.2987955	3,018,022	539.2987955

Berdasarkan Tabel 4, *error* mutlak terbesar terjadi pada tahun 2022 yakni sebesar 82,207, sedangkan *error* mutlak terkecil terjadi pada tahun 2024 yakni sebesar 539. Dengan $n = 10$, maka nilai MAPE yang diperoleh sebesar 1.2119217%, yang termasuk dalam kategori Sangat Akurat karena berada di bawah 10%.



Gambar 1. Grafik Perbandingan Korektor Adams-Moulton dan Data Populasi Kota Surabaya

Gambar 1 memperlihatkan bahwa kurva korektor Adams-Moulton dan data aktual menunjukkan pola pertumbuhan yang searah. Namun terdapat perbedaan pada tahun 2020 hingga 2023, di mana data aktual mengalami fluktuasi sementara kurva korektor Adams-Moulton cenderung lebih mulus dan kontinu. Perbedaan ini diduga disebabkan oleh adanya fluktuasi data aktual pada periode tersebut yang dipengaruhi oleh faktor non-demografis, salah satunya adalah pandemi COVID-19 pada tahun 2020–2021.

3.4. Solusi Model Gompertz menggunakan Metode Milne-Simpson Orde Empat

Solusi numerik berupa estimasi populasi penduduk diperoleh melalui penerapan metode Milne-Simpson. Sebelum metode ini diterapkan, terlebih dahulu dicari nilai awal P_1, P_2 , dan P_3 serta nilai $f_n(t_n, P_n)$ menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Nilai-nilai tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan prediktor Milne dan korektor Simpson. Dengan menggunakan $n = 3$, $h = 1$, dan $P_0 = 2,765,487$, diperoleh nilai prediktor Milne sebagai berikut:

$$P_4^{(0)} = P_0 + \frac{4h}{3} (2f_1 - f_2 + 2f_3) = 2,868,908.0905941$$

Kemudian nilai $f_4^{(0)}$ dicari, maka diperoleh:

$$f_4^{(0)} = f(t_4, P_4) = 25,499.1494038$$

Setelah memperoleh nilai prediktor $P_4^{(0)}$ dan $f_4^{(0)}$. Selanjutnya nilai prediktor diperbaiki menggunakan persamaan korektor sehingga, diperoleh:

$$P_4^{(1)} = P_2 + \frac{1}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) = 2,868,908.0899517$$

Selanjutnya hasil nilai prediktor $P_4^{(0)}$ dan korektor $P_4^{(1)}$, kemudian dihitung *error* relatif sebagai berikut:

$$\frac{|P_4^{(1)} - P_4^{(0)}|}{|P_4^{(1)}|} = \frac{|2,868,908.0899517 - 2,868,908.0905941|}{|2,868,908.0899517|} = 2.2391786 \times 10^{-10}$$

Hasil perhitungan menggunakan metode prediktor-korektor Milne-Simpson dengan nilai awal yang diperoleh dari metode Runge-Kutta orde empat disajikan pada Tabel 5 berikut. Kolom

$P_n^{(0)}$ merupakan hasil prediktor Milne, sedangkan kolom P_n merupakan hasil korektor Simpson.

Tabel 5. Solusi Model Gompertz Menggunakan Metode Milne-Simpson

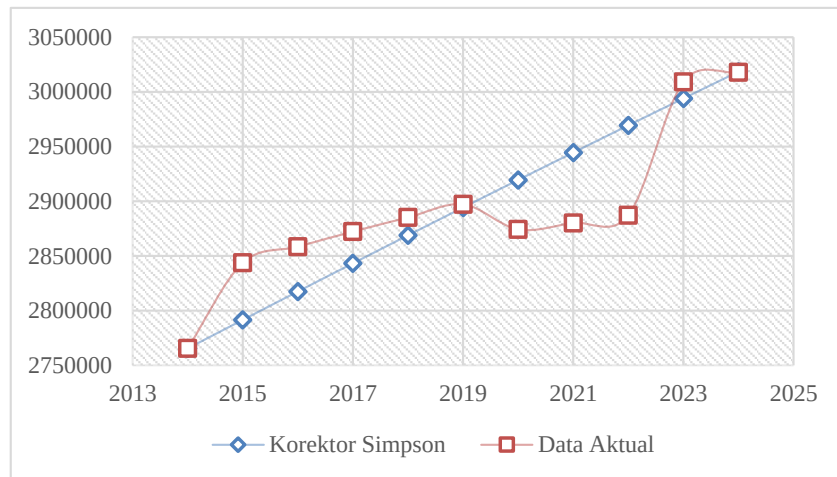
n	Tahun	$P_n^{(0)}$	P_n	Error Relatif
0	2014		2,765,487	
1	2015		2,791,605.5231160	
2	2016		2,817,550.2965149	
3	2017		2,843,318.6615887	
4	2018	2,868,908.0905941	2,868,908.0899517	$2.2391786 \times 10^{-10}$
5	2019	2,894,316.1821730	2,894,316.1815126	$2.2817147 \times 10^{-10}$
6	2020	2,919,540.6630187	2,919,540.6623269	$2.3695521 \times 10^{-10}$
7	2021	2,944,579.3833362	2,944,579.3826288	$2.4023806 \times 10^{-10}$
8	2022	2,969,430.3152980	2,969,430.3145771	$2.4277385 \times 10^{-10}$
9	2023	2,994,091.5509397	2,994,091.5502063	$2.4494917 \times 10^{-10}$
10	2024	3,018,561.2998430	3,018,561.2990991	$2.4644189 \times 10^{-10}$
11	2025	3,042,837.8870275	3,042,837.8862738	$2.4769649 \times 10^{-10}$
12	2026	3,066,919.7505617	3,066,919.7498003	$2.4826211 \times 10^{-10}$
13	2027	3,090,805.4394088	3,090,805.4386401	$2.4870545 \times 10^{-10}$
14	2028	3,114,493.6109950	3,114,493.6102211	$2.4848347 \times 10^{-10}$
15	2029	3,137,983.0290238	3,137,983.0282450	$2.4818486 \times 10^{-10}$
16	2030	3,161,272.5610173	3,161,272.5602356	$2.4727384 \times 10^{-10}$
17	2031	3,184,361.1761112	3,184,361.1753269	$2.4629738 \times 10^{-10}$

Berdasarkan Tabel 5, terlihat bahwa selisih antara nilai prediktor Milne dan korektor Simpson sangat kecil. Dimulai dari $n = 4$ hingga $n = 17$, *error* relatif yang diperoleh konsisten berada pada orde 10^{-10} . Guna melihat seberapa akurat model Gompertz yang diselesaikan dengan metode Milne-Simpson, nilai korektor Simpson kemudian dibandingkan langsung dengan data aktual populasi Kota Surabaya dari tahun 2014 hingga 2024. Hasil perbandingan tersebut disajikan pada Tabel 6 berikut.

Tabel 6. Perbandingan Korektor Simpson dan Data Aktual

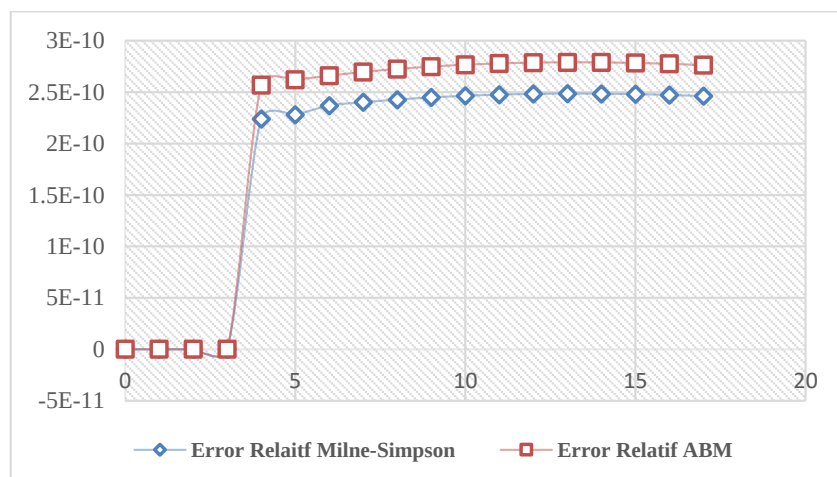
n	Tahun	Korektor Simpson	Data Aktual	Error Mutlak
0	2014	2,765,487	2,765,487	0
1	2015	2,791,605.5231160	2,843,760	52,154.47688400
2	2016	2,817,550.2965149	2,858,493	40,942.70348510
3	2017	2,843,318.6615887	2,872,323	29,004.33841130
4	2018	2,868,908.0899517	2,885,245	16,336.91004830
5	2019	2,894,316.1815126	2,897,245	2,928.81848740
6	2020	2,919,540.6623269	2,874,314	45,226.66232690
7	2021	2,944,579.3826288	2,880,284	64,295.38262880
8	2022	2,969,430.3145771	2,887,223	82,207.31457710
9	2023	2,994,091.5502063	3,009,286	15,194.44979370
10	2024	3,018,561.2990991	3,018,022	539.29909910

Tabel 6 memperlihatkan bahwa *error* mutlak terbesar terjadi pada tahun 2022 yakni sebesar 82,207, sedangkan *error* mutlak terkecil terjadi pada tahun 2024 yakni sebesar 539. Dengan $n = 10$, nilai MAPE yang diperoleh sebesar 1.2119217% , yang termasuk dalam kategori Sangat Akurat karena berada di bawah 10%.



Gambar 2. Grafik Perbandingan Korektor Simpson dan Data Populasi Kota Surabaya

Melalui Gambar 2, terlihat bahwa kurva korektor Simpson dan data aktual bergerak dalam arah pertumbuhan yang sama. Meski demikian, pada rentang tahun 2020 hingga 2023 terdapat selisih yang cukup terlihat, di mana data aktual mengalami naik turun yang tidak beraturan sementara kurva korektor Simpson tetap menghasilkan pola yang lebih halus dan stabil. Perbedaan ini diduga disebabkan oleh adanya fluktuasi data aktual pada periode tersebut yang dipengaruhi oleh faktor non-demografis, salah satunya adalah pandemi COVID-19 pada tahun 2020–2021.



Gambar 3. Perbandingan Error Relatif Adams-Bashforth-Moulton dan Milne-Simpson

Gambar 3 memperlihatkan perbandingan *error* relatif antara metode Adams-Bashforth-Moulton dan metode Milne-Simpson. Pada awal iterasi yakni $n = 0$ hingga $n = 3$, kedua metode belum menghasilkan nilai *error* karena masih menggunakan nilai starter dari RK4.

Memasuki $n = 4$, kedua metode mulai menunjukkan nilai *error* yang kemudian stabil pada orde 10^{-10} hingga akhir iterasi. Secara keseluruhan, kedua metode menghasilkan nilai *error* relatif yang sangat berdekatan, menandakan bahwa keduanya memiliki tingkat ketelitian yang setara dalam menyelesaikan model Gompertz. Meskipun *error* relatif kedua metode berada pada orde yang sama yaitu 10^{-10} , metode Milne-Simpson menghasilkan rata-rata *error* relatif sebesar 2.47×10^{-10} , sedikit lebih kecil dibandingkan metode Adams-Bashforth-Moulton yang mencapai 2.76×10^{-10} . Perbedaan yang sangat tipis ini terjadi karena kedua metode sama-sama merupakan metode prediktor-korektor orde empat yang memiliki tingkat ketelitian teoritis setara. Namun demikian, Milne-Simpson memiliki keunggulan pada stabilitas numerik untuk persamaan dengan perilaku solusi yang relatif halus seperti model Gompertz, sementara Adams-Bashforth-Moulton lebih unggul untuk persamaan diferensial yang bersifat kaku (*stiff*) karena wilayah stabilitasnya yang lebih luas. Dalam konteks prediksi populasi Kota Surabaya yang fluktuasinya tidak ekstrem, kedua metode memberikan akurasi yang hampir sama sehingga keduanya dapat digunakan secara bergantian.

4. Kesimpulan dan Saran

Penelitian ini menghasilkan tiga kesimpulan utama. Pertama, secara numerik model Gompertz dengan parameter $P_0 = 2,765,487$, $K = 5,000,000$, dan $r = 0.016$ menghasilkan prediksi populasi Surabaya tahun 2031 sebesar 3,184,361 jiwa, dengan MAPE 1.2119217% (sangat akurat) serta *error* relatif Adams-Bashforth-Moulton 2.76×10^{-10} dan Milne-Simpson 2.47×10^{-10} . Kedua, metode Milne-Simpson direkomendasikan untuk prediksi populasi karena *error* relatifnya lebih kecil dan lebih stabil untuk solusi yang mulus. Ketiga, secara matematis hasil ini membuktikan bahwa untuk persamaan diferensial nonlinier dengan solusi tidak *stiff*, perbedaan akurasi antara metode prediktor-korektor orde empat sangat kecil, sehingga keduanya dapat digunakan secara bergantian asalkan nilai awal diperoleh dari metode yang akurat seperti RK4.

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan agar dapat mencoba model pertumbuhan lain seperti model Richards atau Verhulst sebagai pembanding, serta menggunakan metode prediktor-korektor orde yang lebih tinggi guna melihat apakah tingkat akurasi yang dihasilkan lebih baik. Selain itu, penambahan rentang data yang lebih panjang diharapkan dapat meningkatkan keakuratan hasil prediksi di masa mendatang.

5. Referensi

- Abdullah, M. (2025). Use of Multistep Methods for Solving ODEs. *Dijlah Journal of Engineering Sciences* ISSN: 3078-9664, e-ISSN: 3078-9656, 2(4).
- Adebisi, A. F., Aremu, S., Ogunniran, M. O., Tijani, K., & Ajileye, A. M. (2025). Enhanced Milne-Simpson's methods for autonomous and singular differential equations. *Mathematics and Computational Sciences*, 6(2), 125–140.

<https://doi.org/10.30511/mcs.2025.2035400.1205>

- Anggraeni, R., Prihandono, B., & Yudhi, Y. (2025). Penyelesaian Numerik Sistem Persamaan Diferensial Non-Linear Pada Model Lotka-Volterra dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton. *BIMASTER: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 14(3), 302–311.
- Anggreini, D. (2020). Penerapan Model Populasi Kontinu Pada Perhitungan Proyeksi Penduduk Di Indonesia (Studi Kasus: Provinsi Jawa Timur). *E-Jurnal Matematika*, 9(4), 229–239. <https://doi.org/10.24843/mtk.2020.v09.i04.p303>
- Aulia, B. U. (2025). BUA Ekspansi Perkotaan di Surabaya Metropolitan Area: Alami atau Terrencana? *Jurnal Penataan Ruang*, 20(2), 164–173.
- BPS Surabaya. (2025). *Jumlah Penduduk Surabaya Menurut Jenis Kelamin dan Kelompok Umur (Jiwa)*. <https://surabayakota.bps.go.id/id/query-builder>
- Dharmayasa, I. G. N. P. (2026). *Buku Ajar Metode Numerik untuk Teknik: Dari Konsep hingga Studi Kasus: Dilengkapi dengan Contoh Soal, Pembahasan, dan Latihan*. Nilacakra.
- Ghoreishi, F., Ghaffari, R., & Saad, N. (2023). Fractional order runge–kutta methods. *Fractal and Fractional*, 7(3), 245. <https://doi.org/10.3390/fractalfract7030245>
- Hussain, S. (2019). Estimation and Prediction of Population Growth in India By Mathematical Models. *International Journal of Engineering, Science and Mathematics*, 8(9), 73–82. <https://doi.org/10.9790/5728-1502037382>
- Olatunji, O., & Akeju, A. (2025). Comparative Analysis of Euler and Order Four Runge-Kutta Methods in Adams-Bashforth-Moulton Predictor-Corrector Method. *International Journal of Mathematics, Statistics, and Computer Science*, 3, 276–293. <https://doi.org/10.59543/ijmscs.v3i.10471>
- Pelinovsky, E., Kokoulina, M., Epifanova, A., Kurkin, A., Kurkina, O., Tang, M., Macau, E., & Kirillin, M. (2022). Gompertz model in COVID-19 spreading simulation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 154, 111699. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111699>
- Raming, I., Wirawan, A. S., Putri, A. A., Sahputra, D. R., Dala, M. A. D., & Avrilia, M. P. (2024). Pemetaan pertumbuhan penduduk di Kota Samarinda melalui pemodelan logistik dengan metode Adams-Bashforth-Moulton. *Journal of Mathematics, Computations and Statistics*, 7(1), 133–143. <https://doi.org/10.35580/jmathcos.v7i1.1945>
- Susmiati, Y., & Nugroho, D. A. (2025). Aplikasi Model Gompertz pada Pertumbuhan *Saccharomyces cerevisiae* (Bakery Yeast). *Jurnal Ilmiah Inovasi*, 25(3), 183–189.
- Tjørve, K. M. C., & Tjørve, E. (2017). The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family. *PloS one*, 12(6), e0178691.
- Wardhana, A. K., Muhtadin, A., & Kurniawan, K. (2024). Aplikasi Persamaan Diferensial dalam Mengestimasi Jumlah Penduduk Kota Samarinda dengan Menggunakan Model Logistik dan Eksponensial. *Jurnal Riset Pecinta Matematika*, 1(2), 109–120.