

Analisis Model Matematika SEITR-SI Dalam Penyebaran Penyakit Leptospirosis Pada Manusia Dengan Pengaruh *Treatment*

Agil Dwi Agustin ¹, Mohammad Iqbal Ainul Yaqin ², Rudianto Artiono ³

^{1, 2, 3} Program Studi Matematika, Universitas Negeri Surabaya
e-mail: agildwi.22038@mhs.unesa.ac.id, mohammadiqbal.22111@mhs.unesa.ac.id, rudiantoartiono@unesa.ac.id

Abstract

Leptospirosis is one of the infectious diseases that often occurs in tropical and subtropical countries. This disease is caused by a bacterium called *Leptospira* pathogen. In this study, leptospirosis was modelled using a mathematical model. This study aims to analyse the SEITR-SI model in the spread of leptospirosis in humans with the influence of treatment. The analysis includes constructing the model, determining the equilibrium point, basic reproduction number, stability analysis, and numerical simulation. The results of this study obtained two equilibrium points, namely the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The stability analysis showed that the disease-free equilibrium point is asymptotically stable. This study also obtained the basic reproduction number using the Next Generation Matrix, namely $R_0 = 0.21286$, which means that the disease will disappear from all populations, and $R_0 = 2.1286$, which means that the disease will remain in all populations. The results of this study also found that the parameters (ϵ_M) and (ω_M) have a significant effect in reducing the number of infected individuals, especially when $\epsilon_M = 0.9$ and $\omega_M = 0.9$.

Keyword: *Leptospirosis, Treatment, SEITR-SI Model.*

Abstrak

Leptospirosis merupakan salah satu penyakit menular yang sering terjadi di negara tropis dan sub tropis. Penyakit ini disebabkan oleh bakteri yang bernama *leptospira pathogen*. Pada penelitian ini, penyakit leptospirosis dimodelkan dengan menggunakan model matematika. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis model SEITR-SI dalam penyebaran penyakit leptospirosis pada manusia dengan pengaruh *treatment*. Analisis tersebut diantaranya adalah mengonstruksi model, menentukan titik kesetimbangan, bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan, dan simulasi numerik. Hasil penelitian ini mendapatkan dua titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, serta pada analisis kestabilan diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik. Penelitian ini juga mendapatkan bilangan reproduksi dasar menggunakan *Next Generation Matrix* yakni $R_0 = 0.21286$ yang berarti penyakit akan hilang dari semua populasi dan $R_0 = 2.1286$ yang bermakna penyakit akan tetap ada di semua populasi. Hasil penelitian ini juga mendapatkan bahwa parameter (ϵ_M) dan (ω_M) memiliki pengaruh yang signifikan dalam menurunkan jumlah individu yang terinfeksi khususnya ketika $\epsilon_M = 0.9$ dan $\omega_M = 0.9$.

Kata Kunci: Leptospirosis, Treatment, Model SEITR-SI.

1. Pendahuluan

Leptospirosis merupakan salah satu penyakit menular yang penyebarannya terjadi begitu cepat. Penyakit ini sering terjadi pada daerah tropis maupun subtropis seperti Asia Tenggara dan Afrika Sub-Sahara, Amerika dan Australia (Artiono *et al.*, 2024; Engida *et al.*, 2022). Penyakit ini juga sering terjadi saat musim hujan (Casanovas-Massana *et al.*, 2018). Penyebab utama penyakit ini yakni bakteri yang bernama *leptospira pathogen* yang dapat bertahan hidup didalam air kemih

hewan (Okosun *et al.*, 2016). Pada umumnya bakteri ini bertahan hidup pada lingkungan yang kurang memiliki pasokan air bersih dan dapat berkembang cukup baik didalam ginjal hewan vektor seperti tikus. Sebagian besar spesies tikus merupakan reservoir dalam penyebaran leptospirosis (Balamurugan *et al.*, 2013; Shirzad *et al.*, 2023). Meskipun bakteri *leptospira* berkembang didalamnya, tikus biasanya masih tetap hidup. Dalam penyebarannya, bakteri *leptospira* dikeluarkan tikus ke lingkungan melalui urin, kemudian lingkungan seperti tanah dan air yang terkontaminasi bakteri tersebut dapat menginfeksi manusia maupun hewan lewat sentuhan. Biasanya, manusia terinfeksi bakteri melalui mukosa seperti mulut, mata, hidung atau kulit yang terluka (Collares-Pereira *et al.*, 2000).

Leptospirosis pada manusia terjadi dalam dua fase. Pada fase pertama, gejala yang ditimbulkan masih berupa penyakit ringan seperti demam, mata merah, sakit kepala, nyeri otot, dan muntah. Fase pertama ini biasanya terjadi selama 3 sampai 7 hari. Sedangkan pada fase kedua, gejala yang muncul sudah ditandai dengan penyakit berat seperti penyakit kuning, pendarahan, gagal ginjal, gagal hati, meningitis, gagal jantung, insufisiensi pernapasan, dan kolaps hemodinamik. Fase ini biasanya terjadi dalam 0 sampai 30 hari dan beberapa pasien juga dapat mengalami kematian (Artiono *et al.*, 2024). Penyakit leptospirosis biasanya terjadi pada laki-laki di usia produktif yang penularannya terjadi secara langsung melalui luka terbuka dan secara tidak langsung melalui kontak dengan lingkungan yang terkontaminasi cairan tubuh atau urin hewan yang terinfeksi (Ridha Rahayu & Subhan, 2022).

Berdasarkan laporan dari World Health Organization, setiap tahunnya penyakit leptospirosis diperkirakan mencapai satu juta kasus dengan angka kematian sebanyak 50.000 lebih di seluruh dunia. Bahkan di daerah yang beriklim tropis kasus leptospirosis dapat mencapai 10 kali lebih besar dibandingkan di daerah yang beriklim sedang (Costa *et al.*, 2015; Klement-Frutos *et al.*, 2020). Di Eropa penyakit leptospirosis mencapai 12.033 kasus pada tahun 1970 sampai 2008 yang tersebar di lima negara seperti Inggris, Prancis, Italia, Portugal, dan Spanyol (World Health Organization, 2010). Sementara di Indonesia sendiri, kasus leptospirosis juga mengalami peningkatan yang signifikan dalam kurun waktu lima tahun terakhir. Di awal pada tahun 2019 dengan jumlah kasus leptospirosis sebanyak 920, kemudian meningkat pada tahun 2020 sebanyak 1173 kasus (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2020, 2021). Meskipun pada tahun 2021 jumlah kasus sempat menurun menjadi 736, namun pada tahun 2022 kembali meningkat menjadi 1.624 kasus (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2022, 2023). Sedangkan pada tahun 2023 kasus leptospirosis mencapai puncaknya, bahkan menjadi yang tertinggi dalam kurun waktu 11 tahun terakhir sejak 2013 yakni sebanyak 2554 kasus (Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, 2024).

Terdapat beberapa upaya dalam mengatasi penyebaran penyakit leptospirosis, salah satunya adalah pemberian *treatment* atau pemberian obat-obatan berupa antibiotik seperti *penisilin* dan *doxycycline* (Masriadi *et al.*, 2017; Yatim, 2007). Individu dengan gejala ringan akan diberikan obat berupa tablet yang harus diminum selama satu minggu hingga habis. Sementara individu dengan gejala yang berat, obat diberikan melalui pembuluh darah dan akan dilakukan penanganan tambahan seperti memberikan cairan infus jika penderita mengalami dehidrasi, pengecekan kerja jantung, pemakaian alat bantu pernapasan, dan cuci darah untuk membantu fungsi ginjal (Ridha Rahayu & Subhan, 2022).

Dalam perspektif matematika penyebaran penyakit dapat di modelkan untuk mengetahui perilaku yang mempengaruhi penyebaran penyakit tersebut. Dari perilaku yang telah dimodelkan nantinya dapat diterapkan di kehidupan nyata. Terdapat beberapa peneliti yang telah berkontribusi dalam mengkaji model penyebaran penyakit leptospirosis. Pimpunchat dkk, (2013) meneliti tentang model penyebaran penyakit leptospirosis dengan membangun model SIR-SI (Pimpunchat *et al.*, 2013). Sementara Artiono dkk, (2020) juga melakukan penelitian yang sama dengan mengonstruksi model SEIR-SIR-SI-L (Artiono *et al.*, 2024). Namun, kedua penelitian tersebut belum memperhatikan faktor-faktor tambahan yang dapat menekan angka penyebaran penyakit leptospirosis. Sedangkan Rahayu dan Subhan, (2022) melakukan penelitian mengenai model SITR-SI dalam penyebaran penyakit leptospirosis dengan pengaruh *treatment* (Ridha Rahayu & Subhan,

2022). Namun dalam penelitian masih belum menambahkan kompartemen subpopulasi manusia terpapar. Sehingga model tersebut belum sepenuhnya menggambarkan karakteristik penyakit leptospirosis yang memiliki masa inkubasi atau ditandai dengan gejala ringan. Dengan demikian, penelitian ini dilakukan untuk membangun dan menganalisis model matematika penyebaran penyakit leptospirosis dengan pengaruh *treatment* yang mengadaptasi model dari penelitian Rahayu dan Subhan, (2022) dengan menambahkan kompartemen subpopulasi manusia yang terpapar leptospirosis, sehingga akan terbentuk model baru yang sesuai dengan karakteristik penyakit leptospirosis yakni SEITR-SI.

2. Metode Penelitian

2.1. Jenis dan Sumber Data

Jenis penelitian ini adalah penelitian studi literatur yang membahas tentang model matematika penyebaran penyakit leptospirosis dengan pengaruh *treatment*. Studi literatur ini dilakukan untuk mendapatkan data atau informasi dari referensi. Informasi mengenai populasi dan parameter dalam penelitian ini dirujuk dari laporan tahunan kemenkes RI, penelitian Rahayu dan Subhan, (2022), dan Artiono dkk, (2024). Nilai parameter baru yang tidak terdapat pada penelitian sebelumnya akan menggunakan asumsi.

2.2. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data pada penelitian ini yakni dengan mengumpulkan informasi mengenai penyebaran dan model dari penyakit leptospirosis. Informasi tersebut bersumber dari penelitian terdahulu, artikel ilmiah, laporan, dan materi yang relevan dengan penelitian ini. Sumber tersebut diakses secara daring dengan bantuan internet.

2.3. Tahapan Penelitian

Berikut merupakan tahapan dalam penelitian ini yakni sebagai berikut: a) studi literatur mengenai penyakit leptospirosis; b) Menyusun asumsi; c) Membangun model matematika dan diagram kompartemen; d) menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit; e) menentukan bilangan reproduksi dasar; f) menganalisis kestabilan titik kesetimbangan; g) melakukan simulasi numerik; h) Kesimpulan dan saran.

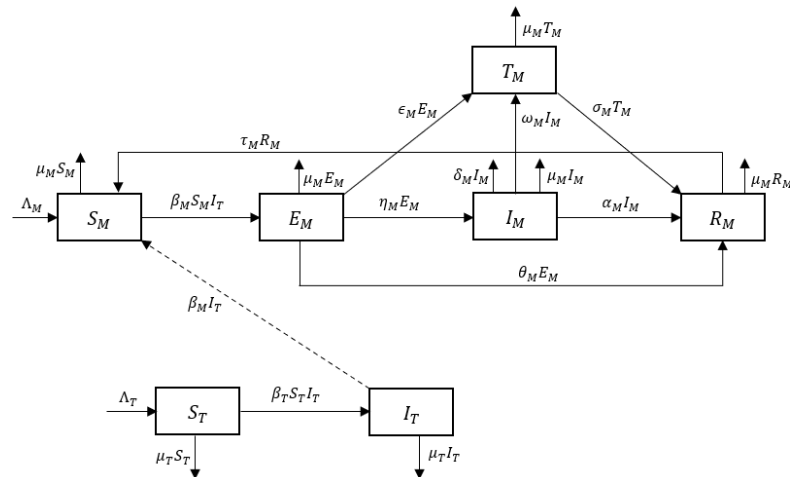
3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

3.1. Mengonstruksi Model SEITR-SI

Model matematika dalam penelitian ini terdiri dari dua populasi yakni manusia dan tikus. Pada populasi manusia terbagi menjadi subpopulasi manusia yang rentan terhadap penyakit leptospirosis $S_M(t)$, subpopulasi manusia yang terpapar leptospirosis $E_M(t)$, subpopulasi manusia yang terinfeksi leptospirosis $I_M(t)$, subpopulasi manusia yang menerima *treatment* $T_M(t)$, dan subpopulasi manusia yang sembuh terhadap penyakit leptospirosis $R_M(t)$. Sedangkan pada populasi tikus terbagi menjadi populasi tikus yang rentan terhadap penyakit leptospirosis $S_T(t)$ dan populasi tikus yang terinfeksi leptospirosis $I_T(t)$.

Pada penelitian ini, beberapa asumsi dibuat untuk membantu dalam menyusun sebuah model matematika penyebaran penyakit Leptospirosis yakni: a) Populasi diasumsikan tertutup; b) Setiap individu dalam subpopulasi manusia yang sembuh dapat menjadi rentan kembali; c) Terdapat masa inkubasi; d) Semua individu yang lahir diasumsikan rentan terhadap penyakit; f) Setiap individu dalam subpopulasi manusia yang terpapar dapat langsung sembuh; g) Manusia dapat tertular dari tikus yang terinfeksi; h) Manusia yang terinfeksi tidak dapat menularkan ke tikus yang rentan; i) Terdapat kematian alami pada populasi manusia dan tikus; j) Tidak ada populasi tikus yang disembuhkan; k) Terdapat kematian pada populasi manusia akibat terinfeksi leptospirosis; l) Tidak ada kematian akibat terinfeksi leptospirosis pada populasi tikus; m) *Treatment* leptospirosis dilakukan dengan individu pada subpopulasi rentan dan terinfeksi.

Berdasarkan asumsi tersebut, dapat dibangun diagram kompartemen penyebaran penyakit leptospirosis seperti pada gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram kompartemen model SEITR-SI

Dari diagram kompartemen penyebaran penyakit leptospirosis tersebut dapat di susun persamaan differensial biasa sebagai berikut.

Populasi Manusia

$$\frac{dS_M}{dt} = \Lambda_M + \tau_M R_M - (\beta_M I_T + \mu_M) S_M, \quad (1)$$

$$\frac{dE_M}{dt} = \beta_M I_T S_M - (\eta_M + \theta_M + \mu_M + \epsilon_M) E_M, \quad (2)$$

$$\frac{dI_M}{dt} = \eta_M E_M - (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) I_M, \quad (3)$$

$$\frac{dT_M}{dt} = \epsilon_M E_M + \omega_M I_M - (\sigma_M + \mu_M) T_M, \quad (4)$$

$$\frac{dR_M}{dt} = \alpha_M I_M + \theta_M E_M + \sigma_M T_M - (\tau_M + \mu_M) R_M. \quad (5)$$

Populasi Tikus

$$\frac{dS_T}{dt} = \Lambda_T - (\beta_T I_T + \mu_T) S_T, \quad (6)$$

$$\frac{dI_T}{dt} = \beta_T I_T S_T - \mu_T I_T. \quad (7)$$

Semua parameter pada persamaan diatas di asumsikan tidak negatif untuk setiap $t > 0$, dengan kondisi awal $S_M(t_0) \geq 0, E_M(t_0) \geq 0, I_M(t_0) \geq 0, T_M(t_0) \geq 0, R_M(t_0) \geq 0, S_T(t_0) \geq 0, I_T(t_0) \geq 0$. Dimana $t \geq t_0$ adalah waktu dalam hari, sedangkan t_0 merupakan awal dari penyebaran penyakit leptospirosis.

Tabel 1. Deskripsi parameter

Parameters	Deskripsi
Λ_M	Laju kelahiran populasi manusia
Λ_T	Laju kelahiran populasi tikus
β_M	Laju penularan subpopulasi manusia rentan oleh subpopulasi tikus terinfeksi
β_T	Laju penularan subpopulasi tikus rentan oleh subpopulasi tikus terinfeksi
η_M	Laju penularan dari subpopulasi manusia terpapar menjadi terinfeksi
μ_M	Laju kematian alami pada populasi manusia
μ_T	Laju kematian alami pada populasi tikus
δ_M	Laju kematian populasi manusia akibat terinfeksi leptospirosis
τ_M	Laju penularan manusia dari subpopulasi sembuh ke subpopulasi rentan

θ_M	Laju kesembuhan dari subpopulasi manusia terpapar
σ_M	Laju kesembuhan dari subpopulasi manusia terinfeksi
ϵ_M	Laju pemberian treatment dari subpopulasi manusia terpapar
ω_M	Laju pemberian treatment dari subpopulasi manusia terinfeksi

3.2. Menentukan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Titik keseimbangan bebas penyakit leptospirosis adalah keadaan ketika tidak ada lagi penyebaran penyakit leptospirosis di semua populasi. Titik keseimbangan bebas penyakit ditentukan dengan mencari solusi dari sistem persamaan diferensial (1) - (7) yakni menganggap setiap persamaan sama dengan nol.

$$\frac{dS_M}{dt} = \frac{dE_M}{dt} = \frac{dI_M}{dt} = \frac{dT_M}{dt} = \frac{dR_M}{dt} = \frac{dS_T}{dt} = \frac{dI_T}{dt} = 0.$$

Sehingga diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit leptospirosis M_0 adalah sebagai berikut.

$$M_0 = \left(\frac{\Lambda_M}{\mu_M}, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_T}{\mu_T}, 0 \right).$$

3.3. Menentukan Titik Keseimbangan Endemik

Titik keseimbangan endemik penyakit leptospirosis merupakan keadaan ketika terdapat penyebaran penyakit leptospirosis di setiap populasi. Kondisi tersebut akan muncul ketika terdapat subpopulasi manusia terinfeksi (I_M) dan subpopulasi tikus yang terinfeksi (I_T). Sehingga diasumsikan $I_M = I_M^*$ dan $I_T = I_T^*$, sehingga diperoleh titik keseimbangan endemic $E_1 = (S_M, E_M, I_M, T_M, R_M, S_T, I_T)$ sebagai berikut.

$$S_M =$$

$$\frac{\Lambda_M \eta_M (\sigma_M + \mu_M) (\tau_M + \mu_M) + \tau_M I_M^* (\sigma_M + \mu_M) (\alpha_M \eta_M + (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) \theta_M) + \tau_M \sigma_M I_M^* (\epsilon_M (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) + \eta_M \omega_M)}{\eta_M (\sigma_M + \mu_M) (\tau_M + \mu_M) (\beta_M I_T^* + \mu_M)},$$

$$E_M = \frac{(\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) I_M^*}{\eta_M},$$

$$I_M = I_M^*,$$

$$T_M = \frac{(\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) \epsilon_M I_M^* + \eta_M \omega_M I_M^*}{\eta_M (\sigma_M + \mu_M)},$$

$$R_M = \frac{I_M^* (\sigma_M + \mu_M) (\alpha_M \eta_M + (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) \theta_M) + \sigma_M I_M^* (\epsilon_M (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) + \eta_M \omega_M)}{\eta_M (\sigma_M + \mu_M) (\tau_M + \mu_M)},$$

$$S_T = \frac{\Lambda_T}{(\beta_T I_T^* + \mu_T)},$$

$$I_T = I_T^*.$$

Pada penelitian ini, analisis titik keseimbangan endemik penyakit leptospirosis tidak dapat dilakukan karena kompleksitas hasil dan akan dikaji pada subbab simulasi numerik

3.4. Menentukan Titik Keseimbangan Endemik

Titik Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan ambang batas dalam menentukan penyebaran penyakit. Dalam mengidentifikasi bilangan ini, terdapat dua keadaan yakni ketika $R_0 < 1$ maka penyakit akan hilang dari semua populasi, ketika $R_0 > 1$ maka penyakit akan terus ada dalam semua populasi. Dalam menentukan R_0 , penelitian ini menggunakan *Next-Generation Matrix* dengan memilih persamaan yang menyebabkan infeksi,

$$\frac{dI_M}{dt} = \eta_M E_M - (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) I_M,$$

$$\frac{dI_T}{dt} = \beta_T I_T S_T - \mu_T I_T.$$

Sehingga didapatkan matriks F dan V sebagai berikut.

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_T I_T S_T \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -\eta_M E_M + (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) I_M \\ \mu_T I_T \end{bmatrix}.$$

Dengan mencari matriks jacobian dari F dan V diperoleh,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta_T S_T \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M) & 0 \\ 0 & \mu_T \end{bmatrix}.$$

Sehingga didapatkan bilangan reproduksi dasar (R_0) yakni dengan menentukan nilai eigen terbesar dari FV^{-1} . Diperoleh nilai eigen terbesar dari FV^{-1} yakni $\lambda = \frac{\beta_T S_T}{(\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M)}$, dengan mensubstitusi titik kesetimbangan bebas penyakit $M_0 = (S_M, E_M, I_M, T_M, R_M, S_T, I_T) = \left(\frac{\Lambda_M}{\mu_M}, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_T}{\mu_T}, 0 \right)$ maka didapatkan,

$$R_0 = \frac{\Lambda_T \beta_T}{\mu_T (\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M)}.$$

3.5. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Analisis kestabilan lokal kesetimbangan bebas penyakit dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks *Jacobian* pada persamaan (1) – (7). Titik kesetimbangan dapat dikatakan stabil jika semua nilai eigen dari matriks *Jacobian* bernilai negatif. Dengan titik kesetimbangan bebas penyakit $M_0 = \left(\frac{\Lambda_M}{\mu_M}, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_T}{\mu_T}, 0 \right)$, diperoleh matriks *Jacobian* $J(M_0)$ sebagai berikut.

$$J(M_0) = \begin{bmatrix} -\mu_M & 0 & 0 & 0 & \tau_M & 0 & -\frac{\Lambda_M \beta_M}{\mu_M} \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Lambda_M \beta_M}{\mu_M} \\ 0 & \eta_M & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_M & \omega_M & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_M & \alpha_M & \sigma_M & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_T & -\frac{\Lambda_T \beta_T}{\mu_T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{bmatrix},$$

dengan,

$$a = -(\eta_M + \theta_M + \mu_M + \epsilon_M), b = -(\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M), c = -(\sigma_M + \mu_M), d = -(\tau_M + \mu_M), \\ e = \frac{\Lambda_T \beta_T}{\mu_T} - \mu_T.$$

Dalam menentukan nilai eigen dari matriks $J(M_0)$, penelitian ini menggunakan bantuan *software maple* yakni dengan mencari $(J(M_0) - \lambda I) = 0$, sehingga diperoleh 7 nilai eigen yakni sebagai berikut.

- a. $\lambda_1 = -\mu_M$, karena semua parameter diasumsikan positif, maka λ_1 akan selalu bernilai negatif.
- b. $\lambda_2 = -(\eta_M + \theta_M + \mu_M + \epsilon_M)$, karena semua parameter diasumsikan positif, maka λ_2 akan selalu bernilai negatif.
- c. $\lambda_3 = -(\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M)$, karena semua parameter diasumsikan positif, maka λ_3 akan selalu bernilai negatif.
- d. $\lambda_4 = -(\sigma_M + \mu_M)$, karena semua parameter diasumsikan positif, maka λ_4 akan selalu bernilai negatif.
- e. $\lambda_5 = -(\tau_M + \mu_M)$, karena semua parameter diasumsikan positif, maka λ_5 akan selalu bernilai negatif.
- f. $\lambda_6 = -\mu_T$, karena semua parameter diasumsikan positif, maka λ_6 akan selalu bernilai negatif.
- g. $\lambda_7 = \frac{\Lambda_T \beta_T}{\mu_T} - \mu_T$, nilai λ_7 akan bernilai negatif jika dipenuhi syarat berikut,

$$\frac{\Lambda_T \beta_T}{\mu_T^2} < 1.$$

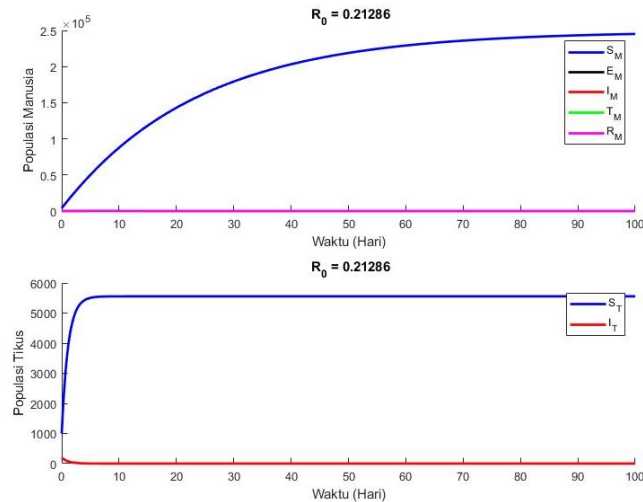
Jika syarat λ_7 dipenuhi maka semua nilai eigen yang diperoleh bernilai negatif, sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit leptospirosis bersifat stabil asimtotik.

3.6. Simulasi Numerik

Dalam melakukan simulasi numerik, penelitian ini menggunakan bantuan *software matlab*. Untuk nilai dari semua parameter, penelitian ini menggunakan nilai parameter dari penelitian (Artiono dkk, 2020), (Rahayu, 2022), dan laporan tahunan Kemenkes RI 2024. Dengan kondisi awal $S_M(0) = 4000, E_M(0) = 50, I_M(0) = 30, T_M(0) = 20, R_M(0) = 10, S_T(0) = 1000, I_T(0) = 200$.

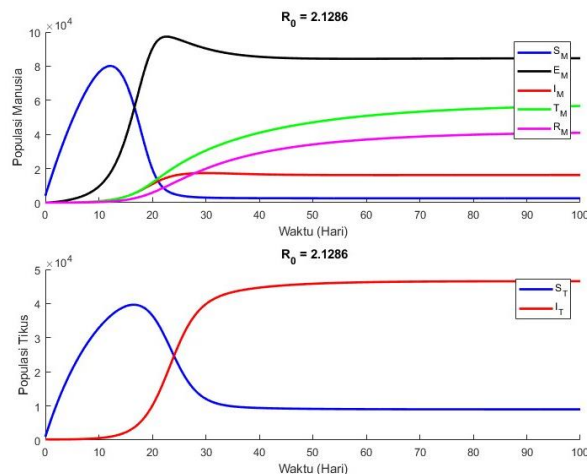
Tabel 2. Nilai parameter

Parameter	Value	Referensi
Λ_M	10451	(Artiono dkk, 2020)
Λ_T	5000	(Artiono dkk, 2020)
β_M	0.00009	(Rahayu, 2022)
β_T	0.00001	Asumsi
μ_M	0.042	(Artiono dkk, 2020)
μ_T	0.9	Asumsi
η_M	0.05	(Artiono dkk, 2020)
θ_M	0.05	(Artiono dkk, 2020)
ϵ_M	0.03	Asumsi
α_M	0.1	(Artiono dkk, 2020)
δ_M	0.118	(Kemenkes RI, 2024)
ω_M	0.001	(Rahayu, 2022)
σ_M	0.0021	(Rahayu, 2022)
τ_M	0.01	(Artiono dkk, 2020)



Gambar 2. Kondisi ketika $R_0 < 1$

Gambar 2 merupakan gambaran ketika keadaan kesetimbangan bebas penyakit atau $R_0 < 1$, dengan $R_0 = 0.21286$. Pada analisis kestabilan didapatkan nilai eigen yakni $\lambda_1 = -0.042$, $\lambda_2 = -0.052$, $\lambda_3 = -0.441$, $\lambda_4 = -0.261$, $\lambda_5 = -0.127$, $\lambda_6 = -0.9$, $\lambda_7 = -0.84$. Dari nilai eigen tersebut maka jenis kestabilannya adalah stabil asimtotik pada titik kesetimbangan bebas penyakit $M_0 = (248833.3; 0; 0; 0; 0; 5555.5, 0)$. Dari gambar 2 menunjukkan bahwa grafik subpopulasi manusia rentan (S_M) dan subpopulasi tikus yang rentan (S_T) mengalami peningkatan yang signifikan, sementara grafik yang lain menuju nol. Berdasarkan hasil simulasi tersebut, ketika $R_0 < 1$ maka grafik akan menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit. Sehingga penyakit leptospirosis akan hilang dari semua populasi seiring berjalannya waktu.

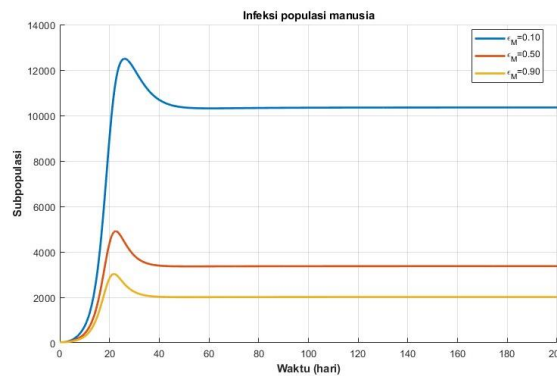


Gambar 3. Kondisi ketika $R_0 > 1$

Gambar 3 merupakan kondisi ketika keadaan endemik penyakit leptospirosis yang dilakukan dengan memodifikasi nilai parameter $\mu_T = 0.09$, sehingga diperoleh nilai $R_0 > 1$ yakni $R_0 = 2.1286$. Pada analisis kestabilan diperoleh nilai eigen yakni $\lambda_1 = -4.23$, $\lambda_2 = -0.25$, $\lambda_3 = -0.13$, $\lambda_4 = -0.49$, $\lambda_5 = -0.42$, $\lambda_6 = -0.46$, $\lambda_7 = -0.09$. Dari nilai eigen tersebut maka jenis kestabilannya adalah stabil asimtotik pada titik kesetimbangan endemik penyakit leptospirosis $M_1 = (2568.059; 84725.73; 16230.982; 58004.6; 41702.62; 9000; 46555.55)$. Berdasarkan

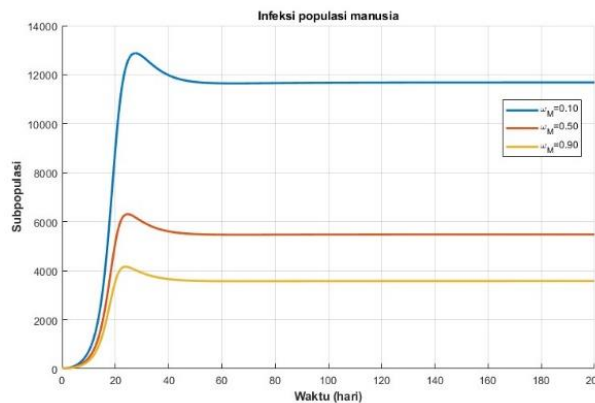
gambar 3 menunjukkan bahwa grafik dari semua populasi tidak ada yang menuju ke nol. Semua grafik akan menuju ke titik kesetimbangan endemik M_1 . Sehingga grafik tersebut menunjukkan bahwa dengan $R_0 > 1$ penyakit leptospirosis akan tetap ada pada semua populasi seiring berjalannya waktu.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk beberapa nilai laju pemberian *treatment* yakni ϵ_M dan ω_M . Simulasi ini dilakukan untuk melihat seberapa signifikan laju pemberian treatment terhadap jumlah subpopulasi manusia yang terinfeksi.



Gambar 4. Simulasi ketika $\epsilon_M = 0.1$, $\epsilon_M = 0.5$, dan $\epsilon_M = 0.9$

Gambar 4 merupakan grafik jumlah subpopulasi manusia terinfeksi ketika $\epsilon_M = 0.1$, $\epsilon_M = 0.5$, dan $\epsilon_M = 0.9$. Grafik tersebut menunjukkan bahwa semakin besar jumlah nilai dari parameter ϵ_M , maka jumlah subpopulasi manusia terinfeksi akan semakin berkurang. Sehingga parameter ϵ_M memiliki pengaruh dalam menekan jumlah infeksi leptospirosis.



Gambar 5. Simulasi ketika $\omega_M = 0.1$, $\omega_M = 0.5$, dan $\omega_M = 0.9$

Gambar 5 merupakan jumlah subpopulasi manusia terinfeksi dengan beberapa perubahan nilai parameter yakni ketika $\omega_M = 0.1$, $\omega_M = 0.5$, dan $\omega_M = 0.9$. Grafik tersebut menunjukkan bahwa dengan perubahan nilai ω_M yang semakin besar, jumlah infeksi akan semakin berkurang.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa penelitian ini telah membangun dan menganalisis model SEITR-SI dalam penyebaran penyakit leptospirosis pada manusia dengan pengaruh *treatment*. Penelitian ini mendapatkan dua titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan bebas penyakit leptospirosis dan titik kesetimbangan endemik penyakit leptospirosis. Pada analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit didapatkan bahwa titik kesetimbangan bebas

penyakit bersifat stabil asimtotik jika syarat λ_7 dipenuhi. Penelitian ini juga mendapatkan bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\Lambda_T \beta_T}{\mu_T(\alpha_M + \delta_M + \mu_M + \omega_M)}$ dengan menggunakan *Next-Generation Matrix*. Ketika $R_0 < 1$, maka penyakit leptospirosis akan menghilang dari semua populasi. Pada saat $R_0 > 1$, maka penyakit leptospirosis akan tetap ada pada semua populasi. Hasil penelitian ini juga mendapatkan bahwa parameter (ϵ_M) dan (ω_M) memiliki pengaruh yang signifikan dalam menurunkan jumlah individu yang terinfeksi leptospirosis pada populasi manusia.

5. Referensi

- H. A. Engida, D. M. Theuri, D. Gathungu, J. Gachohi, and H. T. Alemneh, "A Mathematical Model Analysis for the Transmission Dynamics of Leptospirosis Disease in Human and Rodent Populations," *Comput Math Methods Med*, vol. 2022, 2022, doi: 10.1155/2022/1806585.
- R. Artiono *et al.*, "Mathematical Analysis and Numerical Simulation on Free-Living Leptospira: A Mathematical Modeling Perspective," *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 17, no. 3, pp. 1637–1658, Jul. 2024, doi: 10.29020/nybg.ejpam.v17i3.5178.
- A. Casanovas-Massana, G. G. Pedra, E. A. Wunder, P. J. Diggle, M. Begon, and A. I. Ko, "Quantification of Leptospira interrogans Survival in Soil and Water Microcosms," 2018, [Online]. Available: <https://doi.org/10>
- K. O. Okosun, M. Mukamuri, and D. O. Makinde, "Global stability analysis and control of leptospirosis," *Open Mathematics*, vol. 14, no. 1, pp. 567–585, Aug. 2016, doi: 10.1515/math-2016-0053.
- R. Shirzad, A. A. Alesheikh, M. Asgharzadeh, B. Hoseini, and A. Lotfata, "Spatio-temporal modeling of human leptospirosis prevalence using the maximum entropy model," *BMC Public Health*, vol. 23, no. 1, Dec. 2023, doi: 10.1186/s12889-023-17391-z.
- V. Balamurugan *et al.*, "Characterization of leptospira isolates from animals and humans: Phylogenetic analysis identifies the prevalence of intermediate species in India," *Springerplus*, vol. 2, no. 1, pp. 1–9, 2013, doi: 10.1186/2193-1801-2-362.
- M. Collares-Pereira, M. Mathias, M. Santos-Reis, M. Ramalhinho, P. Duarte-Rodrigues, and M. Johnson, "Rodents and Leptospira transmission risk in Terceira island (Azores)," *Eur J Epidemiol*, vol. 16, pp. 1151–1157, 2000.
- I. Ridha Rahayu and M. Subhan, "Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Leptospirosis dengan Pengaruh Treatment," *Journal Of Mathematics UNP*, vol. 7, no. 1, pp. 28–40, 2022.
- E. Klement-Frutos, A. Tarantola, A. C. Gourinat, L. Floury, and C. Goarant, "Age-specific epidemiology of human leptospirosis in New Caledonia, 2006-2016," Nov. 01, 2020, *Public Library of Science*. doi: 10.1371/journal.pone.0242886.
- F. Costa *et al.*, "Global Morbidity and Mortality of Leptospirosis: A Systematic Review," *PLoS Negl Trop Dis*, vol. 9, no. 9, Sep. 2015, doi: 10.1371/journal.pntd.0003898.
- World Health Organization, "Report of the First Meeting of the Leptospirosis Burden Epidemiology Reference Group," 2010.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, "Profil Kesehatan Indonesia 2019," Jakarta, 2020.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, "Profil Kesehatan Indonesia 2020," Jakarta, 2021.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, "Profil Kesehatan Indonesia 2021," Jakarta, 2022.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, "Profil Kesehatan Indonesia 2022," Jakarta, 2023.
- Kementerian Kesehatan Republik Indonesia, "Profil Kesehatan Indonesia 2023," Jakarta, 2024.
- F. Yatim, *Macam-macam penyakit menular dan cara pencegahannya*. 2007.

- H. Masriadi, S. Km, and others, *Epidemiologi penyakit menular*. PT. RajaGrafindo Persada-Rajawali Pers, 2017.
- B. Pimpunchat, G. C. Wake, C. Modchang, W. Triampo, and A. M. Babylon, "Mathematical Model of Leptospirosis: Linearized Solutions and Stability Analysis," *Appl Math (Irvine)*, vol. 04, no. 10, pp. 77–84, 2013, doi: 10.4236/am.2013.410a2008.