

# Optimisasi *Robust* pada Masalah *Pickup* dan *Delivery* dengan Ketakpastian *Time Window*

Belinda Eka Sarah Dewi

Universitas Bani Saleh  
[belinda@ubs.ac.id](mailto:belinda@ubs.ac.id)

## Abstract

The pickup and delivery problem with time window (PDPTW) is a problem related to planning the optimal route for a vehicle in providing transportation services to a number of customers with the aim of minimizing operational costs. Time window uncertainty is often found in the pickup and delivery problem by transportation service providers. This is important for transportation service providers, because taking into account the uncertainty of the time window is expected to result in better travel routes. In this paper, a deterministic model of PDPTW was developed. Robust Optimization is used to solve the time window uncertainty. The time window uncertainty is assumed to be in a box uncertainty set. Furthermore, Robust counterpart model is developed which is computationally tractable using Linear Programming. Simulations show that parameter uncertainty (perturbation) can affect the optimal solution and routing. Based on simulations, the use of robust optimization can guarantee that parameter uncertainty (perturbation) can be considered in choosing the optimal route and guarantee that the model is robust to parameter uncertainty.

**Keyword:** PDPTW, time window uncertainty, robust optimization

## Abstrak

Masalah *pickup* dan *delivery* dengan *time window* (PDPTW) merupakan permasalahan yang berkaitan dengan perencanaan rute optimal suatu kendaraan dalam memberikan pelayanan transportasi kepada sejumlah pelanggan dengan tujuan meminimalkan biaya operasional. Ketidakpastian *time window* sering ditemukan pada permasalahan *pickup* dan *delivery* oleh penyedia jasa transportasi. Hal ini penting bagi penyedia jasa transportasi, karena dengan mempertimbangkan ketidakpastian rentang waktu diharapkan dapat menghasilkan rute perjalanan yang lebih baik. Dalam penelitian ini, model deterministik PDPTW dikembangkan. Optimisasi Robust digunakan untuk mengatasi ketidakpastian *time window*. Ketidakpastian *time window* diasumsikan berada dalam *box uncertainty set*. Selanjutnya, *Robust counterpart model* dikembangkan yang mana *computationally tractable* menggunakan Pemrograman Linier. Simulasi data menunjukkan bahwa ketidakpastian parameter (*perturbation*) dapat mempengaruhi solusi optimal dan perutean. Berdasarkan simulasi, penggunaan optimisasi robust dapat menjamin ketidakpastian parameter (*perturbation*) dapat dipertimbangkan dalam pemilihan rute optimal serta menjamin model tahan terhadap ketidakpastian parameter.

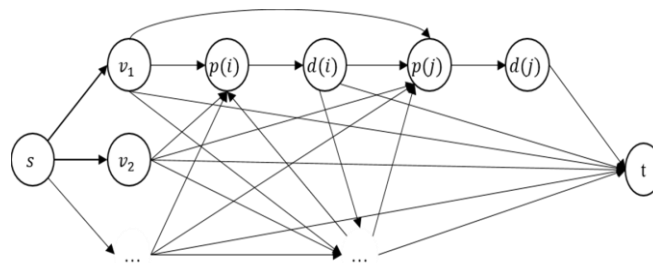
**Kata Kunci:** PDPTW, ketidakpastian *time window*, optimisasi robust

## 1. Pendahuluan

### 1.1. Latar Belakang

Masalah *pickup* dan *delivery* dengan *time window* atau *pickup and delivery problem with time window* (PDPTW) merupakan masalah yang berkaitan dengan perencanaan rute optimal suatu

kendaraan dalam menyediakan layanan transportasi kepada sejumlah pelanggan dengan tujuan meminimumkan biaya operasional. Adanya kendala *time window* mengakibatkan pelayanan permintaan pelanggan harus dilakukan pada interval waktu yang diberikan. PDPTW memerlukan informasi titik asal *pickup* dan titik tujuan *delivery* sehingga setiap pasangan permintaan *pickup* dan *delivery* dilayani oleh kendaraan yang sama. PDPTW dapat dimodelkan sebagai suatu jaringan dengan satu *node* asal (*source node*)  $s$ , satu *node* akhir (*sink node*)  $t$ , satu *node* untuk setiap kendaraan  $v$ , dan dua *node* untuk setiap pelanggan yaitu *node pickup*  $p(i)$  dan *node delivery*  $d(i)$  seperti yang diilustrasikan pada Gambar 1. Model PDPTW klasik pada umumnya mengasumsikan nilai parameter diketahui pasti. Akan tetapi, pada praktiknya sulit menemukan nilai pasti suatu parameter. Ketakpastian nilai parameter dapat disebabkan oleh kesalahan estimasi (den Hertog, 2015). *Time window* merupakan salah satu parameter yang rentan atas ketidakpastian. Hal ini menjadi penting bagi penyedia layanan transportasi, karena dengan mempertimbangkan ketidakpastian *time window* diharapkan akan menghasilkan rute perjalanan yang lebih baik.



**Gambar 1.** Ilustrasi jaringan PDPTW

Masalah ketidakpastian *time window* pada PDPTW diajukan pertama kali oleh Srour *et al.* (2016). Mereka mengemukakan PDPTW dengan estimasi awal *time window* yang diberikan pelanggan tidak akurat. Informasi *time window* akan menjadi akurat ketika pelanggan memberikan konfirmasi kepastian *time window* beberapa saat setelah informasi pertama telah diberikan tetapi sebelum pelayanan terhadap pelanggan dimulai. Untuk mengatasi ketidakpastian *time window*, mereka mengembangkan strategi *sample-scenario* dengan mengasumsikan parameter yang tidak pasti berdistribusi uniform. Mempertimbangkan PDPTW yang diusulkan oleh Srour *et al.* (2016), Györgyi dan Kis (2019) mengembangkan pendekatan stokastik yang berbeda untuk mengatasi ketidakpastian *time window*. Mereka menerapkan *single minimum cost flow* dengan mengasumsikan parameter yang tidak pasti memiliki distribusi uniform untuk kesederhanaan pemodelan. Srour *et al.* (2016) serta Györgyi dan Kis (2019) meyakini bahwa model yang mereka ajukan mampu menangkap esensi dari sebagian besar masalah layanan transportasi truk, taksi, dan supir.

Han *et al.* (2013) menyatakan, pendekatan stokastik memerlukan keakuratan pada distribusi peluang yang digunakan. Pada praktiknya, sulit untuk menemukan distribusi peluang untuk parameter yang tidak pasti. Pemilihan distribusi peluang yang salah bisa mempengaruhi keoptimalan solusi, bahkan bisa menyebabkan solusi menjadi *infeasible*. Untuk mengatasi kesulitan tentang informasi distribusi peluang yang akurat, optimisasi *robust* hadir untuk menyelesaikan masalah ketidakpastian parameter tanpa memerlukan informasi distribusi peluang. Optimisasi *robust* telah banyak digunakan untuk menyelesaikan PDPTW atau

VRPTW dengan ketakpastian parameter. Tajik *et al.* (2014) menggunakan pendekatan Optimisasi Robust pada masalah PDPTW untuk mengatasi ketakpastian parameter input. Begitu juga dengan Hu *et al.* (2018), De La Vega *et al.* (2017), Tajik *et al.* (2014), Sun L dan Wang B (2015), Agra *et al.* (2013), serta Munari *et al.* (2019). Oleh karena itu, pada penelitian ini akan diterapkan optimisasi *robust* untuk mengatasi ketakpastian *time window* pada model deterministik PDPTW yang diajukan oleh Györgyi dan Kis (2019).

## 1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah penelitian ini adalah: Bagaimana metode mengatasi ketakpastian *time window* pada model deterministik PDPTW yang diajukan oleh Györgyi dan Kis (2019).

## 1.3. Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Menggunakan pendekatan optimisasi *robust* pada masalah *pickup* dan *delivery* dengan ketakpastian *time window*.
- b. Mengembangkan model *robust counterpart* untuk masalah *pickup* dan *delivery* dengan ketakpastian *time window*.
- c. Simulasi numerik model optimisasi *robust* pada masalah *pickup* dan *delivery* dengan ketakpastian *time window*.

Manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi bagi pengguna model *pickup* dan *delivery* bahwa optimisasi *robust* dapat menyelesaikan masalah ketakpastian *time window*.
- b. Penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi bagi peneliti di bidang optimisasi, bahwa masalah ketidakpastian parameter bisa diselesaikan dengan optimisasi *robust*.

## 2. Metode Penelitian

### 2.1. Data

Data yang digunakan untuk simulasi numerik pada penelitian ini adalah data sekunder yang berasal dari <https://sites.google.com/site/pdptwinstances/>. Pengambilan data tersebut merujuk pada Srour *et al.* (2016). Untuk kelengkapan data, Penelitian ini juga akan merujuk data yang digunakan oleh Györgyi dan Kis (2019). Data yang dirujuk tersebut berkaitan dengan permintaan layanan transportasi (*dial-a-chauffeur service*) di Belanda.

### 2.2. Optimisasi Robust

Optimisasi *Robust* merupakan sebuah metodologi yang ditujukan untuk mengatasi masalah optimisasi dengan ketakpastian parameter (Ben-Tal *et al.*, 2004; Gorissen *et al.*, 2015; Gulpinar *et al.*, 2013). Merujuk pada Den-Hertog (2015), *Uncertain Linear Programming* (ULP) dapat didefinisikan dalam model matematika berikut:

$$\begin{aligned} & \min_x c^T x \\ & \text{s.t } Ax \leq b \\ & (c, A, b) \in U. \end{aligned} \tag{ULP}$$

Dengan  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , dan  $b \in \mathbb{R}^m$ , menyatakan koefisien yang tak pasti dan  $U$  menyatakan himpunan ketakpastian (*uncertainty set*).

Berdasarkan asumsi yang digunakan oleh den-Hertog (2015), pendekatan optimisasi robust mengubah *uncertain linear problems* (ULP) menjadi *single deterministic problem* yang disebut sebagai *Robust Counterpart*:

$$\pi^* = \min_x \{c^T x \mid Ax \leq b, \forall (c, A, b) \in U\}. \tag{RC}$$

Vektor  $x^*$  dikatakan solusi optimal robust jika untuk semua realisasi  $(c, A, b) \in U$ ,  $x^*$  *feasible* dan nilai dari fungsi objektif dijamin menjadi paling besar  $\pi^*$ . Masalah (RC) dapat dituliskan secara ekivalen sebagai suatu masalah dengan fungsi objektif linear yang tentu dan ketakpastian hanya pada kendala saja seperti berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{x,t} t \\ c^T x - t \leq 0 \\ a_i^T x - b_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \forall (c, A, b) \in U. \tag{2.1}$$

Sehingga tanpa menghilangkan keumuman dapat diasumsikan bentuk umum berikut:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x c^T x \\ a_i^T x - b_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \forall (A, b) \in U, \tag{2.2}$$

dengan  $c$  adalah pasti dan  $\{a_i, b_i\}_{i=1,2,\dots,m}$  adalah tidak pasti. Masalah ini merupakan *semi-infinite programming problem*.

Berikut ini merupakan dua fakta penting mengenai *uncertainty set*  $U$  :

- F.1. *Robustness* terhadap  $U$  dapat diformulasikan *constraint-wise* sehingga *robustness* untuk kendala  $i$  terhadap  $U$  ekivalen dengan *robustness* terhadap  $U_i$ .
- F.2. *Uncertainty set*  $U$  dapat diganti dengan *convex hull* dari *uncertainty set* tersebut.

Berdasarkan fakta tersebut maka dapat dilihat pengaruh dari ketakpastian pada setiap kendala secara individual. Adanya resiko ambiguitas mengakibatkan untuk sementara hanya akan diturunkan kendala ke  $i$  dan perhatikan kendala kanonik *robust semi-infinite* berikut:

$$a_i^T x - b_i \leq 0, \forall (A, b) \in U, \tag{2.3}$$

dengan  $a$  adalah vektor pada  $\mathbb{R}^n$  dan  $b$  adalah skalar yang keduanya representasi umum dari  $a_i$  dan  $b_i$ . Begitu juga dengan  $U$  untuk  $U_i$ . Seringkali lebih mudah untuk mendeskripsikan parameter tak tentu  $a$  dan  $b$  dan *uncertainty set*  $U$  dalam *primitive factor*  $\zeta \in \mathbb{R}^L$ . Sehingga dapat dituliskan dalam bentuk:

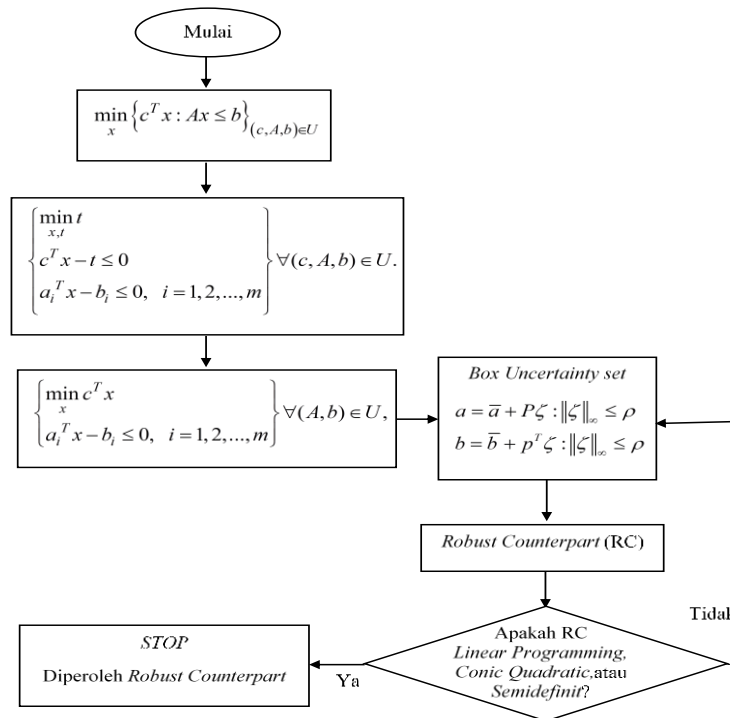
$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + P \zeta, \\ b &= \bar{b} + p^T \zeta, \end{aligned}$$

dengan,  $\bar{a} \in \mathbb{R}^n, P \in \mathbb{R}^{n \times L}, \bar{b} \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^L$  dan

$$U = \left\{ \left( \begin{array}{l} a = \bar{a} + P \zeta \\ b = \bar{b} + p^T \zeta \end{array} \right) \mid \zeta \in Z \right\}. \tag{2.4}$$

$Z \subset \mathbb{R}^L$  adalah *uncertainty set* untuk *primitive factor*. Vektor tetap  $\bar{a}$  dan skalar  $\bar{b}$  disebut nominal.

Masalah (2.3) memiliki bentuk *semi-infinite*, akibatnya masalah ini tidak dapat langsung diselesaikan dengan menggunakan metode optimisasi standar. Tantangan dari masalah ini adalah untuk menemukan tipe *uncertainty set* sehingga masalah tersebut dapat diformulasikan menjadi *tractable optimization problem*. Tahapan formulasi *robust counterpart* ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Tahap formulasi *robust counterpart*

### 2.3. Box Uncertainty Set

Salah satu *uncertainty set* yang bisa digunakan pada optimisasi robust adalah *box uncertainty set*. Pilihan menggunakan *box uncertainty set* lebih disukai hanya jika *feasibility* dari semua kendala sangat diperlukan. *Box uncertainty set* yang memuat *full range* dari realisasi untuk setiap komponen tak tentu merupakan pilihan yang paling robust dan menjamin semua kendala akan terpenuhi (Gorrissen *et al.*, 2015).

Asumsi dari optimisasi linear robust adalah ketakpastiannya bersifat *constraint-wise*, sehingga dapat difokuskan pada satu kendala (mengabaikan indeks  $i$ )

$$(\bar{a} + P \zeta)^T x \leq b, \forall \zeta: \|\zeta\|_\infty \leq \rho. \quad (2.6)$$

Kendala (2.6) ekuivalen dengan:

$$\max_{\zeta: \|\zeta\|_\infty \leq \rho} (\bar{a} + P \zeta)^T x \leq b,$$

Atau

$$\bar{a}^T x + \max_{\zeta: \|\zeta\|_{\infty} \leq \rho} (P^T x)^T \zeta \leq b.$$

Kemudian  $\max_{\zeta: \|\zeta\|_{\infty} \leq \rho} (P^T x)^T \zeta$  dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned} \max_{\zeta: \|\zeta\|_{\infty} \leq \rho} (P^T x)^T \zeta &= \max_{\zeta: \|\zeta\|_{\infty} \leq \rho} (P^T x)_i \zeta_i \\ &= \rho \sum_i |(P^T x)_i| \\ &= \rho \|P^T x\|_1. \end{aligned}$$

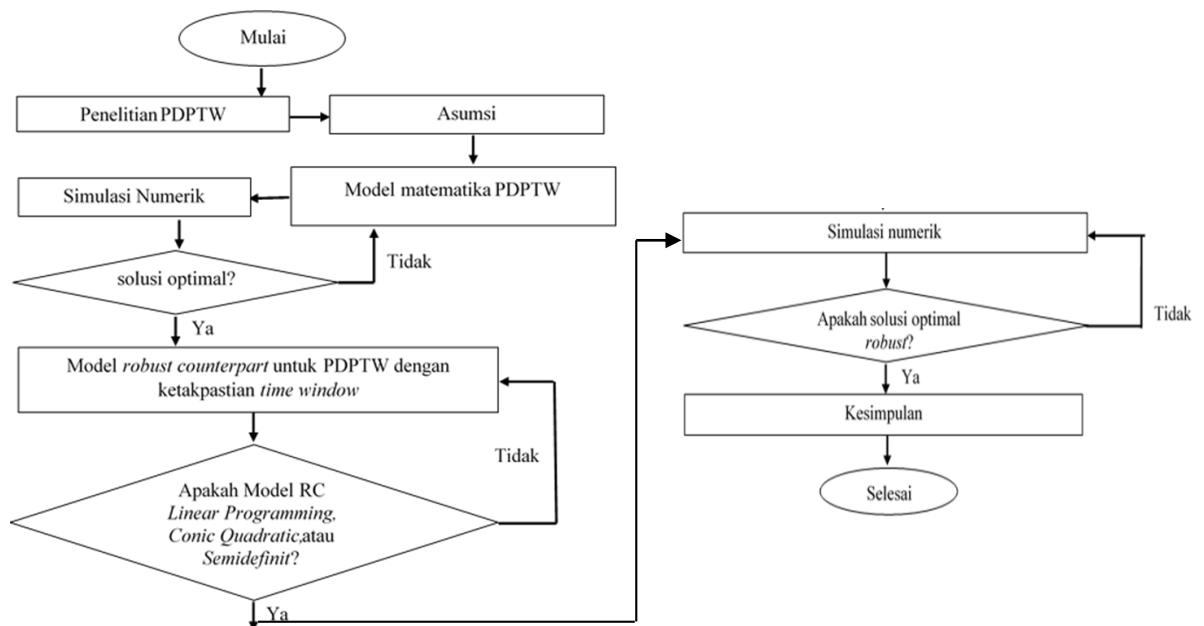
Sehingga, (2.6) ekuivalen dengan

$$\bar{a}^T x + \|P^T x\|_1 \leq b. \quad (2.7)$$

Kendala (2.7) tidak lagi memiliki struktur *semi-infinite problem* seperti kendala (2.6). Kendala (2.7) dapat dimodelkan sebagai kendala linear. Oleh karena itu, *final robust counterpart* memiliki tipe kendala linear meskipun jumlah variabel dan kendala meningkat.  $\rho \|P^T x\|_1$  merupakan *extra safety* untuk memperhitungkan ketidakpastian dan  $\rho \|P^T x\|_1$  bergantung pada nilai  $x$ .

## 2.4. Alur Penelitian

Tahapan penelitian dilakukan seperti alur pada Gambar 3 berikut ini:



Gambar 3. Alur Penelitian

## 3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

### 3.1. Model Deterministik Masalah Pickup dan Delivery dengan Time Window

Penelitian ini mengembangkan model deterministik PDPTW yang diusulkan oleh Györgyi dan Kis (2019). Berdasarkan pengembangan dan modifikasi model yang dilakukan, diperoleh model deterministik masalah pickup dan delivery dengan time window sebagai berikut:

Tabel 1. Notasi model *pickup* dan *delivery* dengan *time window*

Notasi	Deskripsi
Himpunan	
$V$	Himpunan kendaraan.
$J$	Himpunan pelanggan.
$J^{rej}$	Himpunan pelanggan yang ditolak.
Parameter	
$\alpha$	Lokasi asal suatu kendaraan.
$\beta$	Lokasi tujuan suatu kendaraan.
$e_i$	Waktu tercepat kendaraan datang di lokasi <i>pickup</i> pelanggan $i$ .
$l_i$	Waktu terlama kendaraan datang di lokasi <i>pickup</i> pelanggan $i$ .
$dist_i$	Jarak antara lokasi <i>pickup</i> dan <i>drop-off</i> dari pelanggan $i$ .
$dist_{\alpha,\beta}$	Jarak antara lokasi $\alpha$ dan lokasi $\beta$ .
$f, g$	Konstanta tetap untuk menghitung <i>profit</i> $_i$ .
$profit_i$	Keuntungan yang dihasilkan karena melayani pelanggan $i$ . Keuntungan diasumsikan sebagai $f + dist_i \times g$ .
$h$	Faktor biaya untuk menghitung <i>routing cost</i> .
RC	<i>Routing cost</i> : $h \times$ total jarak perjalanan semua kendaraan tanpa muatan beroperasi. Jika kendaraan beroperasi dengan muatan maka tidak ada RC.
LP	<i>Lost profit</i> : Total profit yang hilang dari semua pelanggan yang ditolak ( $\sum_{i \in J^{rej}} profit_i$ ).
$p(i), d(i)$	lokasi <i>pickup</i> dan <i>drop-off</i> dari pelanggan $i$ .
$\tau_{\alpha,\beta}$	Waktu perjalanan antara lokasi $\alpha$ dan $\beta$ .
Variabel Keputusan	
$\delta_i$	Waktu kedatangan kendaraan di lokasi <i>pickup</i> pelanggan $i$ .
$x_{\alpha,\beta}$	$x_{\alpha,\beta} = 0$ : Tidak adanya perjalanan kendaraan dari lokasi $\alpha$ ke $\beta$ . $x_{\alpha,\beta} = 1$ : Adanya perjalanan kendaraan dari lokasi $\alpha$ ke $\beta$ .
	$\sum_{i \in J} profit_i + Min \sum_{(\alpha,\beta) \in E} cost_{\alpha,\beta} x_{\alpha,\beta} \quad (1)$
<i>Subject to :</i>	
	$x_{s,v} = 1, \forall v \in V \quad (2)$
	$\delta_i \geq e_i, \forall i \in J \quad (3)$
	$\delta_i \geq \tau_{depot,p(i)}, \forall i \in J \quad (4)$
	$\delta_i \leq l_i, \forall i \in J \quad (5)$
	$\delta_j + M(1 - x_{d(i),p(j)}) \geq \delta_i + \tau_{p(i),d(i)} + \tau_{d(i),p(j)}, \forall i, j \in J \quad (6)$
	$\sum_{(\alpha,\beta) \in E} x_{\alpha,\beta} = 1, \forall \alpha \in V \quad (7)$
	$\sum_{(d(i),\beta) \in E} x_{d(i),\beta} \leq 1, \forall i \in J \quad (8)$
	$\sum_{(\alpha,p(i)) \in E} x_{\alpha,p(i)} \leq 1, \forall i \in J \quad (9)$
	$\sum_{(\alpha,p(i)) \in E} x_{\alpha,p(i)} = \sum_{(d(i),\beta) \in E} x_{d(i),\beta}, \forall i \in J \quad (10)$

$$\sum_{(\alpha,t) \in E} x_{\alpha,t} = |V| \quad (11)$$

$$\sum_{(\alpha,p(i)) \in E} x_{\alpha,p(i)} = x_{p(i),d(i)}, \forall i \in J \quad (12)$$

$$x_{p(i),d(i)} = \sum_{(d(i),\beta) \in E} x_{d(i),\beta}, \forall i \in J \quad (13)$$

$$x_{\alpha,\beta} \in \{0,1\}, \forall (\alpha,\beta) \in E \quad (14)$$

$$\delta_i \in \mathbb{R}^+, \forall i \in J \quad (15)$$

dengan

$$cost_{\alpha,\beta} := \begin{cases} \text{jika } (\alpha = s \text{ dan } \beta \in V) \text{ atau } (\alpha \in V \text{ dan } \beta = t) \\ 0, \text{ atau untuk beberapa } i \in J, \alpha = p(i), \beta = d(i) \\ h \cdot dist_{depot,p(i)} - profit_i, \text{ jika } \alpha \in V \text{ dan } \beta = p(i) \text{ untuk beberapa } i \in J \\ h \cdot dist_{d(j),p(i)} - profit_i, \text{ jika } \alpha \in d(j) \text{ dan } \beta = p(i) \text{ untuk beberapa } i \neq j \in J \\ h \cdot dist_{d(i),depot}, \text{ jika } \alpha = d(i) \text{ untuk beberapa } i \in J \text{ dan } \beta = t. \end{cases}$$

(1) Meminimumkan total kendaraan travelling idle dan lost profit. (2) Menjamin semua kendaraan memiliki daftar tugas. (3) Menjamin waktu kedatangan kendaraan sesudah earliest time. (4) Menjamin waktu kedatangan kendaraan melebihi waktu perjalanan ke lokasi. (5) Menjamin waktu kedatangan kendaraan tidak melebihi latest time. (6) Menjamin kendaraan memiliki cukup waktu untuk melayani pelanggan dan kemudian pergi ke lokasi selanjutnya. (7) Menjamin setiap kendaraan hanya memiliki satu daftar tugas saat berangkat dari depot. (8) Menjamin titik *pickup* dikunjungi maksimal satu kali. (9) Menjamin titik *delivery* dikunjungi maksimal satu kali. (10) Menjamin bahwa jika ada yang masuk ke titik pickup  $i$  maka harus ada yang keluar dari titik delivery  $i$ . (11) Menjamin semua kendaraan kembali ke depot. (12) Menjamin bahwa jika ada yang masuk ke titik pickup  $i$  maka harus ada yang keluar dari titik tersebut. (13) Menjamin bahwa jika ada yang masuk ke titik delivery  $i$  maka harus ada yang keluar dari titik tersebut. (14) Keputusan dilaluinya atau tidak busur  $\alpha, \beta$  bernilai biner. (15) Waktu dimulainya pelayanan pelanggan adalah bilangan riil positif.

### 3.2. Model Robust Counterpart

Pada masalah ini ketakpastian terletak pada *time window*. Pada kendala (3) dan kendala (5), ketakpastian terletak pada parameter ruas kanan kendala. Oleh karena itu dilakukan *treatment* optimisasi robust dengan mendefinisikan variabel tambahan  $z$  dan  $y$  pada kendala (3) dan kendala (5), sehingga kedua kendala tersebut berubah menjadi:

$$\delta_i - e_i z \geq 0 \quad (16)$$

$$\delta_i - l_i y \leq 0 \quad (17)$$

Ketakpastian parameter *time window* yaitu parameter  $e_i$  dan  $l_i$  diasumsikan berada pada sebuah *uncertainty set* yang berbentuk *box* ( $\forall e_i, l_i \in U$ ). Pada kasus *box uncertainty set*, *time window* yang diasumsikan tidak pasti akan terbatas pada sebuah interval yang simetris di



sekitar nilai nominal yang diketahui, sehingga bentuk dari *uncertainty set* untuk masalah ini adalah sebagai berikut :

$$U_{e_i,box} = \{e_i = \bar{e}_i + P\zeta : \|\zeta\|_\infty \leq \varphi\} \quad (18)$$

$$U_{l_i,box} = \{l_i = \bar{l}_i + Q\xi : \|\xi\|_\infty \leq \rho\} \quad (19)$$

$P$  dan  $Q$  merupakan konstanta gangguan (*perturbation*) yang menyebabkan nilai parameter tidak pasti.

Pada model optimisasi robust, kendala (16) dan kendala (17) melibatkan parameter *time window* yang berada pada suatu *box uncertainty set*. Pengembangan model hanya difokuskan pada dua kendala tersebut saja. Kendala (16) menjadi seperti berikut:

$$\begin{aligned} \delta_i - e_i z \geq 0, \quad \forall e_i \in U_{e_i,box} &\equiv \delta_i - (\bar{e}_i + P\zeta)z \geq 0, \quad \forall \zeta: \|\zeta\|_\infty \leq \varphi \\ &\equiv \delta_i - \bar{e}_i z - P\zeta z \geq 0, \quad \forall \zeta: \|\zeta\|_\infty \leq \varphi \\ &\equiv \min_{\zeta: \|\zeta\|_\infty \leq \varphi} \delta_i - \bar{e}_i z - P\zeta z \geq 0 \\ &\equiv \delta_i - \bar{e}_i z - \min_{\zeta: \|\zeta\|_\infty \leq \varphi} (P\zeta)z \geq 0 \\ &\equiv \delta_i - \bar{e}_i z - (-\varphi \|Pz\|_1) \geq 0 \\ &\equiv \delta_i - \bar{e}_i z + \varphi |Pz| \geq 0 \\ &\text{Digunakan } \varphi = 1, \text{ sehingga:} \\ &\equiv \delta_i - \bar{e}_i z + |Pz| \geq 0 \\ &\text{Karena variabel } z \text{ bernilai positif, sehingga:} \\ &\equiv \delta_i - \bar{e}_i z + |P|z \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Kendala (17) menjadi seperti berikut:

$$\begin{aligned} \delta_i - l_i y \leq 0, \quad \forall l_i \in U_{l_i,box} &\equiv \delta_i - (\bar{l}_i + Q\xi)y \leq 0, \quad \forall \xi: \|\xi\|_\infty \leq \rho \\ &\equiv \delta_i - \bar{l}_i y - Q\xi y \leq 0, \quad \forall \xi: \|\xi\|_\infty \leq \rho \\ &\equiv \max_{\xi: \|\xi\|_\infty \leq \rho} \delta_i - \bar{l}_i y - Q\xi y \leq 0 \leq 0 \\ &\equiv \delta_i - \bar{l}_i y - \max_{\xi: \|\xi\|_\infty \leq \rho} (Q\xi)y \leq 0 \\ &\equiv \delta_i - \bar{l}_i y - \rho \|Qy\|_1 \leq 0 \\ &\equiv \delta_i - \bar{l}_i y - \rho |Qy| \leq 0 \\ &\text{Digunakan } \rho = 1, \text{ sehingga:} \\ &\equiv \delta_i - \bar{l}_i y - |Qy| \leq 0 \\ &\text{Karena variabel } y \text{ bernilai positif, sehingga:} \\ &\equiv \delta_i - \bar{l}_i y - |Q|y \leq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

*Robust Counterpart* diperoleh dengan mengganti Kendala (16) menjadi kendala (20) dan kendala (17) menjadi kendala (21) dan menambahkan kendala  $y = 1$  dan  $z = 1$ . Model di atas dapat diklasifikasikan ke dalam kelas *Linear Programming* karena fungsi tujuan dan kendalanya merupakan fungsi linear. Dengan demikian, model *Robust Counterpart* tersebut *computationally tractable* dengan menggunakan *Linear Programming*.

### 3.3. Simulasi Numerik Model Deterministik PDPTW Penelitian

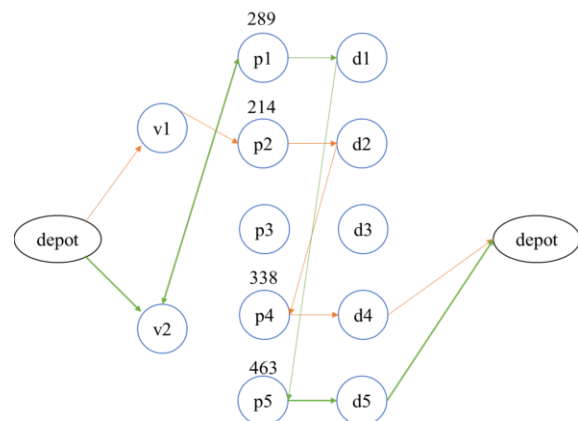
#### Simulasi 1

Simulasi pertama dilakukan dengan mengasumsikan banyaknya kendaraan yang beroperasi  $|V| = 2$  dan banyaknya permintaan pelanggan  $|J| = 5$ . Data yang digunakan pada simulasi pertama adalah data pada Tabel 2. Hasil perutean dari simulasi pertama ditunjukkan oleh Gambar 4 dengan nilai total biaya yang dikeluarkan adalah 222.94 satuan biaya. Pada simulasi pertama model deterministik ini, *vehicle* 1 ( $v_1$ ) berangkat dari depot untuk melayani pelanggan 2.  $v_1$  sampai di lokasi *pickup* pada waktu ke 214. Setelah selesai melakukan *pickup* dan *delivery* untuk pelanggan 2,  $v_1$  selanjutnya melayani pelanggan 4.  $v_1$  sampai di lokasi *pickup* pada waktu ke 338. Setelah selesai melakukan *pickup* dan *delivery* untuk pelanggan 4,  $v_1$  kembali ke depot.

Sedangkan untuk *vehicle* 2 ( $v_2$ ) dari depot berangkat untuk melayani pelanggan 1.  $v_2$  sampai di lokasi *pickup* pada waktu ke 289. Setelah selesai melakukan *pickup* dan *delivery* untuk pelanggan 1,  $v_2$  selanjutnya melayani pelanggan 5.  $v_2$  sampai di lokasi *pickup* pada waktu ke 463. Setelah selesai melakukan *pickup* dan *delivery* untuk pelanggan 5,  $v_2$  kembali ke depot. Pada simulasi ini permintaan pelanggan 3 tidak dapat dipenuhi, karena *vehicle* tidak dapat datang sesuai dengan *time window* pelanggan.

**Tabel 2.** Nilai Time Window untuk Simulasi 1 Model Deterministik

Pelanggan $i$	Time Window	
	Earliest $\bar{e}_i$	Latest $\bar{l}_i$
1	289	294
2	214	219
3	277	282
4	338	343
5	463	468



**Gambar 4.** Simulasi 1 Model Deterministik PDPTW

### 3.4. Simulasi Numerik Model Robust PDPTW Penelitian

#### Simulasi 1

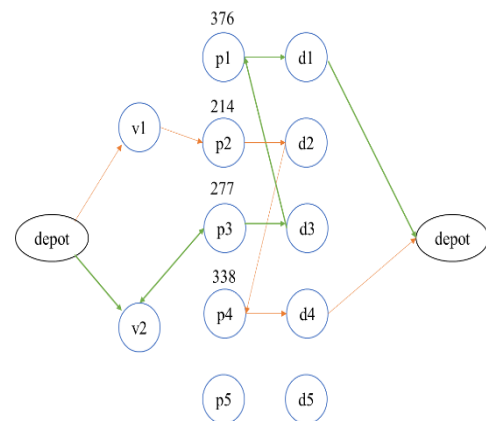
Simulasi numerik selanjutnya dilakukan pada model *Robust Counterpart* (RC) yang telah dikembangkan. Simulasi dilakukan untuk menjelaskan bahwa ketidakpastian parameter dapat mempengaruhi solusi optimal dan perutean. Perbedaan dengan simulasi model deterministik terletak pada adanya data *perturbation* parameter *time window*. Simulasi pertama model RC dilakukan dengan mengasumsikan banyaknya kendaraan yang beroperasi  $|V| = 2$  dan banyaknya permintaan pelanggan  $|J| = 5$ . Data yang digunakan pada simulasi pertama adalah data pada Tabel 3. Hasil perutean dari simulasi pertama model RC ditunjukkan oleh Gambar 5 dengan nilai total biaya yang dikeluarkan adalah 146.48 satuan biaya.

Pada simulasi pertama ini, *vehicle 1* ( $v_1$ ) berangkat dari depot untuk melayani pelanggan 2.  $v_1$  sampai di lokasi *pickup* pada waktu ke 214. Setelah selesai melakukan *pickup* dan *delivery* untuk pelanggan 2,  $v_1$ selanjutnya melayani pelanggan 4.  $v_1$  sampai di lokasi *pickup* pada waktu ke 338. Setelah selesai melakukan *pickup* dan *delivery* untuk pelanggan 4,  $v_1$  kembali ke depot.

Sedangkan untuk *vehicle 2* ( $v_2$ ) dari depot berangkat untuk melayani pelanggan 3 dan pelanggan 1. Pada simulasi ini permintaan pelanggan 5 tidak dapat dipenuhi, karena *vehicle* tidak dapat datang sesuai dengan *time window* pelanggan. Simulasi 1 model RC memiliki data yang hampir sama dengan simulasi 1 model deterministik. Perbedaan terletak pada adanya *time window perturbation* pada pelanggan 1. Ketakpastian pada *time window* pelanggan 1 mengakibatkan hasil perutean dan nilai optimal simulasi 1 model RC berbeda dengan simulasi 1 model deterministik. Rute perjalanan  $v_2$  pada simulasi 1 RC berubah menjadi menuju pelanggan 3 dan pelanggan 1, sedangkan pada simulasi 1 model deterministik rute perjalanan  $v_2$  adalah menuju pelanggan 1 dan pelanggan 5.

**Tabel 3.** Data Time Window untuk Simulasi 1 Model RC

Pelanggan $i$	Time Window (nominal)		Time Window (perturbation)	
	Earliest $\bar{e}_i$	Latest $\bar{l}_i$	$P_i$ (earliest)	$Q_i$ (latest)
1	289	294	-49	-49
2	214	219	0	0
3	277	282	0	0
4	338	343	0	0
5	463	468	0	0



**Gambar 5.** Hasil Perutean Simulasi 1 Model RC

#### 4. Kesimpulan

Penelitian ini membahas tentang masalah PDPTW dengan ketidakpastian pada informasi *time window* (*pickup*) pelanggan. Pada penelitian ini, digunakan optimisasi robust untuk mengatasi ketidakpastian parameter *time window*. Optimisasi robust mengasumsikan parameter *time window* diasumsikan berada pada suatu *uncertainty set* yang deterministik. Pada penelitian ini parameter *time window* diasumsikan berada pada suatu *uncertainty set* berbentuk *box*. Selanjutnya dapat ditentukan model ekuivalen deterministik (*Robust Counterpart*) yang *computationally tractable* menggunakan Pemrograman Linear. *Robust Counterpart* digunakan untuk menghitung solusi robust optimal.

Optimisasi *robust* berorientasi pada *worst-case* dari suatu masalah. Simulasi numerik menunjukkan adanya gangguan (*perturbation*) akan mempengaruhi rute perjalanan kendaraan dan keoptimalan solusi. Hasil simulasi model *Robust Counterpart* dengan mempertimbangkan ketidakpastian *time window* menunjukkan bahwa rute optimal yang diperoleh akan berbeda

dengan hasil simulasi model deterministik tanpa mempertimbangkan *time window*. Sedangkan dalam praktiknya kasus *pickup and delivery* sangat penting untuk mempertimbangkan ketakpastian parameter *time window*. Menggunakan optimisasi robust akan menjamin solusi akan selalu *feasible* dan tahan terhadap ketakpastian nilai parameter.

## 5. Referensi

- Agra, A., Christiansen, M., Figueiredo, R., Hvattum, L. M., Poss, M., & Requejo, C. (2013). The robust vehicle routing problem with time windows. *Computers & Operations Research*, 40(3), 856-866. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.10.002>
- De La Vega, J., Munari, P., & Morabito, R. (2017). Robust optimization for the vehicle routing problem with multiple deliverymen. *Central European Journal of Operations Research*, 27(4), 905-936. <https://doi.org/10.1007/s10100-017-0511-x>
- Den Hertog, D., Ben-Tal, A., & Brekelmans, R. (2015). *Practical Robust Optimization* (Lecture Notes LNMB Course).
- Ford, W. (2014). *Numerical Linear Algebra with Applications using MATLAB*. Academic Press. 119–144.
- Gorissen, B. L., Yanıkoğlu, I., & den-Hertog, D. (2015). A practical guide to robust optimization. *OMEGA*, 53(C), 124-137. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2014.12.006>
- Gulpınar, N., Pachamanova, D. A., & Çanakoğlu, E. (2013). Robust strategies for facility location under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 225(1), 21-35.
- Györgyi, P., & Kis, T. (2019). A probabilistic approach to pickup and delivery problem with time window uncertainty. *European Journal of Operation Research*, 274(3), 909-923. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.10.031>
- Han, J., Lee, C., & Park, S. (2013). A Robust scenario approach for the vehicle routing problem with uncertain travel times. *Transportation Science*, 48, 1-18. <https://doi.org/10.1287/trsc/2013.0476>
- Hu, C., Lu, J., Liu, X., & Zhang, G. (2018). Robust vehicle routing problem with hard time windows under demand and travel time uncertainty. *Computers & Operations Research*, 94, 139-153. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.02.006>
- Klamroth, K., Köbis, E., Schöbel, R., & Tammer, C. (2017). A unified approach to uncertain optimization. *European Journal of Operational Research*, 260(2), 403-420.
- Munari, P., Moreno, A., De La Vega, J., Alem, D., Gondzio, J., & Morabito, R. (2019). The robust vehicle routing problem with time windows: compact formulation and branch-price-and-cut method. *Transportation Science*, 53(4), 1043-1066. <https://doi.org/10.1287/trsc.2018.0886>
- Rao, S.S. (2009). *Engineering Optimization Theory and Practice*. New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Srouf, F.J., Agatz, N., & Oppen, J. (2018). Strategies for handling temporal uncertainty in pickup and delivery problems with time windows. *Transportation Science*, 52(1), 3–19. <https://doi.org/10.1287/trsc.2015.0658>
- Sun, L., & Wang, B. (2014). Robust optimisation approach for vehicle routing problems with uncertainty. *International Journal of Computer Applications in Technology*, 50(3), 200. <https://doi.org/10.1504/IJCAT.2014.066727>

Tajik, N., Tavakkoli-Moghaddam, R., Vahdani, B., & Meysam, M. S. (2014). A robust optimization approach for pollution routing problem with pickup and delivery under uncertainty. *Journal of Manufacturing Systems*, 33(2), 277-286. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2013.12.009>